IZPIT IZ MATEMATIKE III

6. september 2006

1. Izračunajte enačbi tangentne ravnine in normalne premice na ploskev

$$\vec{r}(u,v) = (u^2, u\cos v, u\sin v)$$

v točki $T(2,1,1)$.

Rešitev. Najprej poračunamo/opazimo, da ploskev doseže točko T pri $v = \frac{\pi}{4}, u = \sqrt{2}$. Računamo:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u(u,v) &= (2u, \cos v, \sin v)\\
\vec{r}_u\Big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\Big) &= \Big(2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) \sim (4,1,1)\\
\vec{r}_v(u,v) &= (0, -u\sin v, u\cos v)\\
\vec{r}_v\Big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\Big) &= (0,-1,1)\\
\vec{n}\Big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\Big) &= \vec{r}_u\Big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\Big) \times \vec{r}_v\Big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\Big) = (2,-4,-4) \sim (1,-2,-2)
\end{aligned}$$

Torej se enačba tangentne ravnine glasi $x - 2y - 2z = -2$, enačba normalne premice pa $x - 2 = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-2}$.

2. Izračunajte krivuljni integral

$$\int_C (y^2 - z^3)dx + (z^3 - x^2)dy + (x-y)dz,$$

kjer je krivulja C daljica od točke $A(1,-1,0)$ do točke $(4,-2,-1)$.
Z ustreznim kriterijem preverite še, če je ta integral neodvisen od poti.

Rešitev. Parametrizacija daljice je $x = 1+3t, y = -1-t, z = -t$, kjer $0 \le t \le 1$. Tako dobimo $\dot{x} = 3, \dot{y} = -1, \dot{z} = -1$ in integral se prevede do

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(\big((-1-t)^2 - (-t)^3\big)3 + \big((-t)^3 - (1+3t)^2\big)(-1) + \big(1+3t-(-1-t)\big)(-1)\Big)dt =\\
&= \int_0^1 4t^3 + 12t^2 + 8t + 2dt = (t^4 + 4t^3 + 4t^2 + 2t)\Big|_0^1 =\\
&= 11
\end{aligned}$$

Iz teorije vemo, da bi bil ta integral neodvisen od poti, če bi bil rotor vektorskega polja $\vec{V} = (y^2 - z^3, z^3 - x^2, x - y)$ enak $\vec{0}$. Velja pa, da je

$$\operatorname{rot} \vec{V} = (-1 - 3z^2, -3z^2 - 1, -2x - 2y) \neq (0,0,0)$$

in zato ta integral ni neodvisen od poti.

3. Izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = (4x^2 - y^2 - z^2, 8xy + xz^2, \cos x^3 + 8xz)$$

skozi zaključeno ploskev, ki je rob telesa:

$$x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; z \geq 0, \;\; x + y + z \leq 1.$$

Rešitev. Pomagali si bomo kar z Gaussovo formulo. Tako najprej poračunamo $\operatorname{div} V = 8x + 8x + 8x = 24x$ in se nam integral prevede do

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} 24x \, dz = 24 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xz\Big|_0^{1-x-y} dy = \\
&= 24 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(x - x^2 - xy\right) dy = 24 \int_0^1 \left(xy - x^2 y - \frac{xy^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx = \\
&= 24 \int_0^1 \left(x - 2x^2 + x^3 - \frac{x - 2x^2 + x^3}{2}\right) dx = \\
&= \left(12x^2 - 16x^3 + 6x^4 - 6x^2 + 8x^3 - 3x^4\right)\Big|_0^1 = \\
&= 1
\end{aligned}$$

4. Razvij funkcijo

$$f(z) = \frac{5z - 1}{z^2 - z - 2}$$

v Laurentovo vrsto na kolobarju $1 < |z| < 2$.

Rešitev. S pomočjo parcialnih ulomkov $\frac{5z-1}{z^2-z-2} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+1}$ dobimo po rešitvi sistema dveh enačb z dvema neznankama, da je $\frac{5z-1}{z^2-z-2} = \frac{3}{z-2} + \frac{2}{z+1}$. Nato pa glede na dano območje dalje predelamo:

$$\begin{aligned}
\frac{5z-1}{z^2-z-2} = \frac{3}{z-2} + \frac{2}{z+1} &= \frac{3}{-2(1-\frac{z}{2})} + \frac{2}{z(1-(-\frac{1}{z}))} = \\
&= -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{z}\right)^n = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3z^n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

5. Izračunaj kompleksni integral

$$\int_{|z-\frac{i}{2}|=1} \frac{1}{z(z-1)(z-i)^2} \, dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Singularnosti znotraj našega območja sta le $z = 0$ in $z = i$, tako da upoštevamo le ta dva residuuma. Singularnost $z = 0$ je pol prve stopnje, singularnost $z = i$ pa pol druge stopnje.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=0} \frac{1}{z(z-1)(z-i)^2} &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{(z-1)(z-i)^2} = \frac{1}{(-1)(-i)^2} = 1 \\
\mathrm{Res}_{z=i} \frac{1}{z(z-1)(z-i)^2} &= \lim_{z\to i} \left(\frac{1}{z(z-1)}\right)' = \lim_{z\to i} \frac{-2z+1}{z^2(z-1)^2} = \frac{-2i+1}{i^2(i-1)^2} = \\
&= \frac{-2i+1}{-1(-1-2i+1)} = \frac{-2i+1}{2i} = -1 - \frac{i}{2}
\end{aligned}$$

Integral tako pride

$$\begin{aligned}
&= 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=0} \frac{1}{z(z-1)(z-i)^2} + \mathrm{Res}_{z=i} \frac{1}{z(z-1)(z-i)^2}\right) = \\
&= 2\pi i\left(1 - 1 - \frac{i}{2}\right) = \pi
\end{aligned}$$

Vprašanja in pripombe: kristijan.cafuta@fe.uni-lj.si