Izpit iz MATEMATIKE III

4. junij 2007

1. Poišči vse tangentne ravnine na ploskev $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$, ki so vzporedne ravnini $2x + y + z = 0$.

Rešitev. Ker je normala na našo ploskev enaka $(8x, 2y, 8z) \sim (4x, y, 4z)$, normala na ravnino pa $(2, 1, 1)$, dobimo

$$(4x, y, 4z) = k(2, 1, 1),$$

kar pomeni $x = \frac{k}{2}, y = k, z = \frac{k}{4}$. Če vstavimo to sedaj v našo ploskev, dobimo

$$\begin{aligned} 4\frac{k^2}{4} + k^2 + 4\frac{k^2}{16} &= 1 \\ k^2 &= \pm\frac{4}{9} \\ k_{1,2} &= \pm\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

Kar nam predstavlja dve točki $T_1(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$ in $T_2(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6})$. Enačba vzporednih ravnin začetni ravnini, ki gresta skozi ti dve točki sta tako

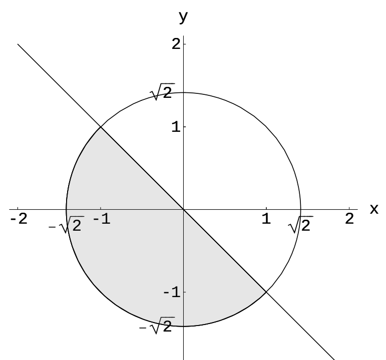
$$\begin{aligned} 2x + y + z &= d \\ \pm\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3} \pm \frac{1}{6} &= d \\ d &= \pm\frac{3}{2} \end{aligned}$$

in kočno dobimo iskani rešitvi

$$2x + y + z = \pm\frac{3}{2}.$$

2. Poišči površino dela paraboloida $z = x^2 + y^2$, ki ga določata neenačbi $z \leq 2$ in $x + y \leq 0$.

Rešitev. Projekcija našega dela na xy-ravnino je



Uvedimo polarne koordinate in računajmo:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4r^2}\, r dr = \\ &= \frac{1}{8} \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_1^9 \sqrt{t}\, dt = \\ &= ... = \frac{13\pi}{6} \end{aligned}$$

3. Pokaži, da je krivuljni integral

$$\int_A^B \Big(\frac{e^{yz}}{x} - \frac{\operatorname{tg} y}{x^2}\Big)dx + \Big(ze^{yz}\log x + \frac{1}{x\cos^2 y}\Big)dy + \big(ye^{yz}\log x\big)dz$$

neodvisen od poti in ga izračunaj za primer $A(1, \frac{\pi}{4}, 1)$, $B(e, 0, 2)$.

Rešitev. Vemo, da je krivuljni integral 2. vrste neodvisen od poti, če je rotor pripadajočega vektorskega polja enak $\vec{0}$. Zato računajmo:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}\vec{V} = \\
&= \Bigg(e^{yz}\log x + yze^{yz} - (e^{yz}\log x + yze^{yz}), y\frac{e^{yz}}{x} - \frac{ye^{yz}}{x}, \frac{ze^{yz}}{x} - \frac{1}{x^2\cos^2 y} - \Big(\frac{ze^{yz}}{x} - \frac{1}{x^2\cos^2 y}\Big)\Bigg) = \\
&= (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Za izračun integrala poiščimo potencial tega vektorskega polja:

$$\begin{aligned}
&\int \Big(\frac{e^{yz}}{x} - \frac{\operatorname{tg} y}{x^2}\Big)dx = e^{yz}\log x + \frac{\tan y}{x} + C(y,z) \\
&\int \Big(ze^{yz}\log x + \frac{1}{x\cos^2 y}\Big)dy = e^{yz}\log x + \frac{\tan y}{x} + C(x,z) \\
&\int \big(ye^{yz}\log x\big)dz = e^{yz}\log x + C(x,z)
\end{aligned}$$

Tako dobimo $F(x,y,z) = e^{yz}\log x + \frac{\tan y}{x} + C$ in naš iskani integral je enak

$$F(e,0,2) - F\Big(1, \frac{\pi}{4}, 1\Big) = 1 - 1 = 0.$$

4. Naj bo krivulja C sestavljena iz dela parabole $y = x^2$ od točke $(0,0)$ do točke $(1,1)$ in dela premice $y = x$ od točke $(1,1)$ do točke $(0,0)$. Reši integral

$$\int_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx - dy$$

na dva načina; kot krivuljni integral druge vrste in z uporabo Greenove formule.

Rešitev.

- kot krivuljni integral 2. vrste:
  Krivuljo razbijemo na dva dela. Prvi del parametriziramo

  $$x = y,\ y = t^2,\ \dot{x} = 1,\ \dot{y} = 2t,\ 0 \le t \le 1,$$

  drugi del pa

  $$x = -t,\ y = -t,\ \dot{x} = -1,\ \dot{y} = -1,\ 0 \le t \le 1.$$

  Tako dobimo

  $$\begin{aligned}
  \int_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx - dy &= \int_0^1 (\operatorname{arctg} t - 2t)\,dt + \int_0^1 (-\operatorname{arctg} 1 + 1)\,dt = \\
  &= \Big(t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\log\big(t^2+1\big) - t^2\Big)\Big|_0^1 + \Big(-\frac{\pi}{4} + 1\Big)t\Big|_0^1 = \\
  &= \Big(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 - 1\Big) + \Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big) = \\
  &= -\frac{1}{2}\log 2.
  \end{aligned}$$

- z uporabo Greenove formule:

$$Q_x - P_y = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned}
\int_C \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\, dx - dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} -\frac{x}{x^2 + y^2}\, dy = \\
&= \int_0^1 \Big(-x \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \Big) \Big|_{x^2}^{x} dx = \\
&= -\int_0^1 (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} x)\, dx = \\
&= -\Big(\frac{\pi}{4} x - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \log\left(t^2 + 1\right) \Big) \Big|_0^1 = \\
&= -\frac{1}{2} \log 2.
\end{aligned}$$

5. (a) Reši enačbo $\cos w + i\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

   (b) Izračunaj integral

$$\int_{|z|=\frac{1}{10}} \frac{1}{z^2 \Big(\cos\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Big)}\, dz,$$

   kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev.

(a) Če uporabimo zvezo

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2},$$

se nam enačba prevede do

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = -i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

po substituciji $u = e^{iw}$ pa do kvadratne enačbe

$$u^2 + i\sqrt{2}u + 1 = 0,$$

ki ima rešitvi

$$u_{1,2} = \frac{-i\sqrt{2} \pm \sqrt{-2-4}}{2} = i\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm \sqrt{3}).$$

Če vstavimo sedaj nazaj našo substitucijo in dobljeno enačbo kompleksno logaritmiramo, dobimo dve družini rešitev

$$iw = \log\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm \sqrt{3}) \right)$$

$$iw = \begin{cases} \log\left| i\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \sqrt{3}) \right| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ \log\left| i\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - \sqrt{3}) \right| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \end{cases}$$

$$w = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \sqrt{3}) \right) \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}) \right) \end{cases}$$

(b) Singularnosti naše funkcije so $z = 0$ in po točki (a) še

$$z + \frac{\pi}{4} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + \sqrt{3}) \right) \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3}) \right) \end{cases}$$

Vse ti poli, ki jih dobimo s pomočjo točke (a) imajo že realni del po absolutni vrednosti večji kot $\frac{1}{10}$ in zato vsi ti ležijo izven našega območja. Tako nam edina singularnost, ki je znotraj območja, ostane točka $z = 0$, ki je pol 2. stopnje. Izračunajmo residuum v tej točki:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)' &= \lim_{z\to 0}\frac{\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\cos\left(z+\frac{\pi}{4}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{(1+i)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2i} = \\ &= -i\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Naša iskana vrednost integrala je tako enaka $2\pi i\left(-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\pi$.

Vprašanja in pripombe: kristijan.cafuta@fe.uni-lj.si