IZPIT IZ MATEMATIKE III

15. januar 2008

1. (a) Izračunajte tangetno ravnino na ploskev

$$2^x + z \arctan y + \log z = 1$$

v točki $T(0,0,1)$.

(b) V kateri točki krivulje

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t(t-1)}{\log 2}, \sin^2 t - \cos^2 t, t + \cos(2t) \right)$$

je tangetna premica vzporedna z ravnino $(\log 2)x + y + z = 1$?

Rešitev.

(a) Normala tangetne ravnine je enaka

$$\vec{n}(x,y,z) = (F_x, F_y, F_z) = \left(2^x \log 2, \frac{z}{1+y^2}, \arctan y + \frac{1}{z} \right)$$
$$\vec{n}(0,0,1) = (\log 2, 1, 1)$$

Tangetna ravnina se tako glasi $(\log 2)x + y + z = d$, kjer d poračunamo z vstavljanjem točke T in dobimo

$$(\log 2)x + y + z = 1.$$

(b) Smerni vektor tangentne premice je enak

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{2t-1}{\log 2}, 4 \sin t \cos t, 1 - 2\sin 2t \right) = \left(\frac{2t-1}{\log 2}, 2\sin 2t, 1 - 2\sin 2t \right).$$

Pogoj vzporednosti z ravnino pomeni pravokotnost na normalo te ravnine oziroma

$$\log 2 \, \frac{2t-1}{\log 2} + 2\sin 2t + 1 - 2\sin 2t = 0,$$

kar nam da $t = 0$ in točko $T(0,-1,1)$.

2. Izračunajte površino ploskve $z = xy$, ki leži znotraj valja $x^2 + y^2 = 15$.

Rešitev. Vemo, da površino dobimo kot $\iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy$, kjer je D projekcija naše ploskve na xy ravnino. Omenjena projekcija je enaka krogu v središčni legi s polmerom $\sqrt{15}$. Tekom računanja uvedimo cilindrične koordinate in nato substitucijo $1 + r^2 = u$. Dobimo

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2}\, dxdy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + r^2}\, r\, dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{16} \sqrt{u}\, du = \\ &= \frac{1}{2}\, 2\pi \left(16^{3/2}\, \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = 42\pi.\end{aligned}$$

3. Dokažite, da je integral

$$\int_A^B \left(\frac{z}{\sqrt{1 - x^2}} + 2xe^{x^2 - y^2}, -2ye^{x^2 - y^2}, \arcsin x + \frac{1}{z + 1} \right)$$

neodvisen od poti, in ga za primer $A(0, 0, 0)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ izračunajte.

Rešitev.

$$\operatorname{rot} \vec{V} = \left(0 - 0, \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, -4xye^{x^2 - y^2} + -4xye^{x^2 - y^2} \right) = (0, 0, 0).$$

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{z}{\sqrt{1 - x^2}} + 2xe^{x^2 - y^2} \right) dx &= z \arcsin x + e^{x^2 - y^2} + C(y, z) \\ \int -2ye^{x^2 - y^2}\, dy &= e^{x^2 - y^2} + C(x, z) \\ \int \left(\arcsin x + \frac{1}{z + 1} \right) dz &= z \arcsin x + \log(z + 1) + C(x, y) \\ U(x, y, z) &= z \arcsin x + e^{x^2 - y^2} + \log(z + 1) + C.\end{aligned}$$

Iskani integral tako dobimo

$$U(B) - U(A) = \frac{\pi}{6} + 1 + \log 2 - 1 = \frac{\pi}{6} + \log 2.$$

4. Vzemimo točke $T_1(0, 0)$, $T_2(\pi, 0)$ in $T_3(0, 2)$. S pomočjo Greenove formule izračunajte integral

$$\int_C 10x^9 y^{11}\, dx + (11x^{10} y^{10} - 3y^2 \cos x) dy,$$

kjer je krivulja C sestavljena iz daljice od točke T_1 do točke T_2, krivulje $y = 1 + \cos x$ od točke T_2 do točke T_3 in daljice od točke T_3 do točke T_1.

Rešitev. Označimo $P = 10x^9y^{11}$ in $Q = 11x^{10}y^{10} - 3y^2\cos x$. Po Greenovi formuli se nam iskani integral prevede do (tekom računanja uvedemo substitucijo $u = 1 + \cos x$):

$$\begin{aligned}\iint_D (Q_x - P_y)\,dxdy &= \iint_D (110x^9y^{10} + 3y^2\sin x - 110x^9y^{10})\,dxdy = \\ &= \int_0^\pi dx \int_0^{1+\cos x} 3y^2\sin x\,dy = \int_0^\pi (1+\cos x)^3 \sin x\,dx = \\ &= -\int_2^0 u^3\,du = -\left(0 - \frac{2^4}{4}\right) = 4.\end{aligned}$$

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z+2i|=3} \frac{9}{z(z+3i)^2(z+3)}\,dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Singularnosti znotraj našega območja sta le $z = 0$ in $z = -3i$, zato upoštevamo le ta dva residuuma. Singularnost $z = 0$ je pol prve stopnje, singularnost $z = -3i$ pa pol druge stopnje.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z=0} \frac{9}{z(z+3i)^2(z+3)} &= \lim_{z\to 0} \frac{9}{(z+3i)^2(z+3)} = -\frac{1}{3} \\ \mathrm{Res}_{z=-3i} \frac{9}{z(z+3i)^2(z+3)} &= \lim_{z\to -3i} \left(\frac{9}{z(z+3)}\right)' = \lim_{z\to -3i} \frac{9(-2z-3)}{z^2(z+3)^2} = \\ &= \frac{9(6i-3)}{(-3i)^2(-3i+3)^2} = \ldots = \frac{1}{3} + \frac{i}{6}\end{aligned}$$

Integral se nam tako prevede v

$$\begin{aligned}&= 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=0} \frac{9}{z(z+3i)^2(z+3)} + \mathrm{Res}_{z=-3i} \frac{9}{z(z+3i)^2(z+3)}\right) = \\ &= 2\pi i\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{i}{6}\right) = -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Vprašanja in pripombe: kristijan.cafuta@fe.uni-lj.si