IZPIT IZ MATEMATIKE III

2. junij 2008

1. (a) Poiščite tangentno ravnino ploskve

$$\vec{r}(u,v) = \left(\frac{u}{v} + 1,\ \frac{1}{u^2} + \frac{3}{2},\ uv\right)$$

v točki $T\,(2,2,2)$.

(b) Poiščite točko na krivulji

$$\vec{r}(t) = \left(2\sin t + 2,\ 4 - 2\cos(2t),\ \frac{9}{2} - \sqrt{3}\cos t\right),$$

v kateri je tangentna premica pravokotna na ravnino

$$2x + 4y + z = 14.$$

Rešitev.

(a) Za določitev parametrov u, v v točki $T(2,2,2)$ dobimo sistem enačb

$$\frac{u}{v} + 1 = 2, \qquad \frac{1}{u^2} + \frac{3}{2} = 2, \qquad uv = 2,$$

ki ima rešitev $u = v = \pm\sqrt{2}$. Normalo tangentne ravnine dobimo na sledeč način

$$\vec{r}_u(u,v) = \left(\frac{1}{v}, -\frac{2}{u^3}, v\right)$$
$$\vec{r}_v(u,v) = \left(-\frac{u}{v^2}, 0, u\right)$$
$$\vec{n} = \vec{r}_u\left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right) \times r_v\left(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}\right) = \left(-1, -2, -\frac{1}{2}\right) \sim (2,4,1)$$

Torej se tangentna ravnina glasi $2x + 4y + z = d$, kjer d poračunamo z vstavljanjem točke $T(2,2,2)$ in dobimo $2x + 4y + z = 14$.

(b) Poračunajmo si najprej tangentni vektor:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(2\cos t, 4\sin(2t), \sqrt{3}\sin t\right).$$

Ker mora biti tangentna premica pravokotna na ravnino, pomeni, da mora biti tangentni vektor vzporeden normali ravnine. Torej mora veljati

$$\left(2\cos t, 4\sin(2t), \sqrt{3}\sin t\right) = k(2,4,1)$$

oziroma dobimo sistem enačb

$$2\cos t = 2k, \qquad 4\sin(2t) = 4k, \qquad \sqrt{3}\sin t = k.$$

Kakorkoli pogledamo na ta sistem (recimo, da najprej zdelimo zadnjo in prvo enačbo ali da najprej enačimo drugi dve enačbi, kjer upoštevamo $\sin(2t) = 2\sin t\cos t$), dobimo rešitev $t = \frac{\pi}{6}$. Iskano točko dobimo seveda tako, da sedaj to vstavimo v začetno parametrizacijo, kar nam da točko $T(3,3,3)$.

2. Vzemimo krivuljni integral

$$\int_C (yz + 3x^2)dx + (xz - z + \arctan x)dy + (xy - y)dz.$$

(a) Ali je omenjen integral neodvisen od poti?

(b) Izračunajte omenjen integral za primer, ko je krivulja C daljica od točke $A(1,-1,-2)$ do točke $B(3,-1,1)$.

Rešitev.

(a) Vemo, da je krivuljni integral $\int_C \vec{V}\cdot d\vec{r}$ neodvisen od poti natanko tedaj, ko velja $\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0}$. Iz

$$\operatorname{rot}(yz + 3x^2, xz - z + \arctan x, xy - y) = (x - x, y - y, z + \frac{1}{1+x^2} - z) \neq \vec{0}$$

tako sklepamo, da naš integral NI neodvisen od poti.

(b) Parametrizirajmo daljico:

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + (3-1)t = 1 + 2t, & \dot{x}(t) &= 2 \\ y(t) &= -1 + (-1+1)t = -1, & \dot{y}(t) &= 0 \\ z(t) &= -2 + (1+2)t = -2 + 3t, & \dot{z}(t) &= 3 \end{aligned}$$

kjer je $0 \leq t \leq 1$. Tako se nam iskani integral prevede do

$$... = \int_0^1 \left((2 - 3t + 3(1+2t)^2)2 + (-2t)3\right)dt = \int_0^1 (24t^2 + 12t + 10)dt = ... = 24.$$

3. S pomočjo Gaussove formule izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \big(xy + e^z \cos x,\ 3y^2 + \arctan(x^3 z^2),\ -2yz + e^z \sin x\big)$$

skozi zaključeno ploskev, ki je rob telesa, določenega z neenačbami

$$z \geq \sqrt{x^2+y^2}, \quad z \leq 6 - (x^2+y^2), \quad y \geq 0.$$

Rešitev. Zaradi Gaussove formule si poračunajmo najprej divergenco našega vektorskega polja $\vec{V}$:

$$\operatorname{div} \vec{V} = y - e^z \sin x + 6y - 2y + e^z \sin x = 5y.$$

Telo, določeno z zgornjimi neenačbami, se v cilindričnih koordinatah opiše z

$$z \geq r, \quad z \leq 6 - r^2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Projekcija našega telesa na xy-ravnino je krog z radijem, ki je rešitev enačbe $r = 6 - r^2$, torej $(r+3)(r-2) = 0$ oziroma $r = 2$. Tako s pomočjo Gaussove formule dobimo, da je iskani pretok vektorskega polja $\vec{V}$ enak

$$\int_0^\pi d\varphi \int_0^2 dr \int_r^{6-r^2} 5\, r \sin\varphi\, r\, dz = \int_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi \int_0^2 5r^2(6 - r^2 - r)\, dr = ... = 56.$$

4. Razvijte funkcijo

$$f(z) = \frac{21z+52}{z^2+9z-52}$$

v Laurentovo vrsto na kolobarju $4 < |z| < 13$.

Rešitev. S pomočjo parcialnih ulomkov

$$\frac{21z+52}{z^2+9z-52} = \frac{21z+52}{(z-4)(z+13)} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z+13} = \frac{A(z+13)+B(z-4)}{(z-4)(z+13)}$$

dobimo po rešitvi sistema enačb $A + B = 21$ in $13A - 4B = 52$, da velja $A = 8$ in $B = 13$ oziroma

$$\frac{21z+52}{z^2+9z-52} = \frac{8}{z-4} + \frac{13}{z+13}.$$

Nato pa glede na dano območje dalje predelamo:

$$\frac{21z+52}{z^2+9z-52} = \frac{8}{z-4} + \frac{13}{z+13} = \frac{8}{z(1-\frac{4}{z})} + \frac{13}{13\big(1-(-\frac{z}{13})\big)} =$$

$$= \frac{8}{z}\sum_{n=0}^\infty \Big(\frac{4}{z}\Big)^n + \sum_{n=0}^\infty \Big(-\frac{z}{13}\Big)^n = \sum_{n=0}^\infty \frac{2^{2n+3}}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^n}{13^n}$$

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z+i|=2} \frac{8}{z^2(z^2+4)}\, dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Singularnosti naše funkcije $\frac{8}{z^2(z^2+4)}$ so $z = 0$, ki je pol druge stopnje, in $z = \pm 2i$, ki sta pola prve stopnje. Znotraj integracijskega območja $|z - (-i)| = 2$ sta pa le $z = 0$ in $z = -2i$. Poračunajmo si residuuma v teh dveh singularnostih:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=0} \frac{8}{z^2(z^2+4)} &= \lim_{z\to 0} \left(\frac{8}{(z^2+4)}\right)' = \lim_{z\to 0} \frac{-16z}{(z^2+4)^2} = 0, \\
\operatorname{Res}_{z=-2i} \frac{8}{z^2(z^2+4)} &= \lim_{z\to -2i} \frac{8}{z^2(z-2i)} = \frac{8}{-4(-4i)} = -\frac{i}{2}.
\end{aligned}$$

Iskani integral tako dobimo

$$\begin{aligned}
\int_{|z+i|=2} \frac{8}{z^2(z^2+4)}\, dz &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} \frac{8}{z^2(z^2+4)} + \operatorname{Res}_{z=-2i} \frac{8}{z^2(z^2+4)}\right) = \\
&= 2\pi i \left(0 - \frac{i}{2}\right) = \pi.
\end{aligned}$$