IZPIT IZ MATEMATIKE III

8. junij 2009

1. Poiščite tisto tangentno ravnino na ploskev
$$\vec{r}(u,v) = (ue^v, u^2, 2uv),$$
ki je vzporedna ravnini $2x - y - z = 3$.

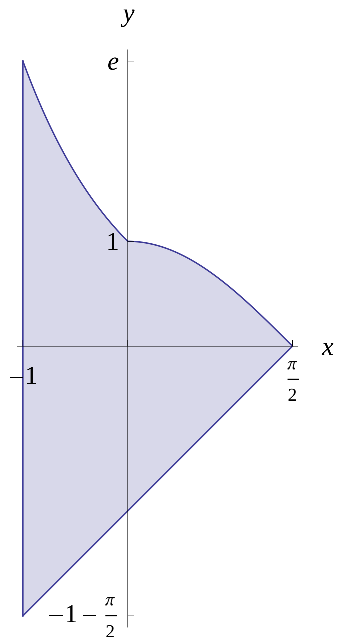
Rešitev.

$$\begin{aligned}
\vec{r}_u(u,v) &= (e^v, 2u, 2v) \\
\vec{r}_v(u,v) &= (ue^v, 0, 2u) \\
\vec{n}(u,v) &= \vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v) = (4u^2, 2e^v uv - 2e^v u, -2e^v u^2)
\end{aligned}$$

Zaradi zahtevane vzporednosti ravnin velja
$$(4u^2, 2e^v uv - 2e^v u, -2e^v u^2) = k(2, -1, -1),$$
kar nam da sistem treh enačb:
$$\begin{aligned}
4u^2 &= 2k \\
2e^v uv - 2e^v u &= -k \\
-2e^v u^2 &= -k
\end{aligned}$$
S pomočjo prve in tretje enačbe takoj dobimo $e^v = 1$ oziroma $v = 0$. Z upoštevanjem tega pa skupaj z drugo enačbo dobimo še $u = 1$. (Opomba: primer $u = 0$ ni rešitev, ker bi v tem primeru dobili ničelni normalni vektor!). Tako smo dobili, da se iskana tangentna ravnina zgodi v točki $\vec{r}(1,0) = (1,1,0)$ in se zato glasi $2x - y - z = 1$.

2. Zamenjajte vrstni red integracije v integralu
$$\int_{-1-\frac{\pi}{2}}^{0} dy \int_{-1}^{y+\frac{\pi}{2}} 8\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-1}^{\arccos y} 8\,dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\log y} 8\,dx$$
in nato dobljen integral izračunajte.

Rešitev.
Krivulje, ki omejujejo naše integracijsko območje, se glasijo:
$$\begin{array}{lll}
x = -1, & & \\
x = y + \dfrac{\pi}{2} & \text{oziroma} & y = x - \dfrac{\pi}{2}, \\
x = \arccos y & \text{oziroma} & y = \cos x, \\
x = -\log y & \text{oziroma} & y = e^{-x},
\end{array}$$
in tako dobimo območje, ki izgleda tako:



Z upoštevanjem mej torej dobimo, da se naš integral prevede do

$$... = \int_{-1}^{0} dx \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{e^{-x}} 8\ dy + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{x-\frac{\pi}{2}}^{\cos x} 8\ dy,$$

kar pa enostavno izračunamo:

$$\begin{aligned}
... &= \int_{-1}^{0} 8\Big(e^{-x} - \big(x - \frac{\pi}{2}\big)\Big)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 8\Big(\cos x - \big(x - \frac{\pi}{2}\big)\Big)dx = \\
&= 8\Big(- e^{-x} - \frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2}\Big)\Big|_{-1}^{0} + 8\Big(\sin x - \frac{x^2}{2} + \frac{\pi x}{2}\Big)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= -8 + 8e + 4 + 4\pi + 8 - \pi^2 + 2\pi^2 = \\
&= 4 + 8e + 4\pi + \pi^2
\end{aligned}$$

3. Izračunajte krivuljni integral

$$\int_C (x^2 + xy^3)\ ds,$$

kjer je krivulja C določena z $y = \sqrt{4 - x^2}$, $z = 1$.

Rešitev.

Hitro opazimo, da krivulja C predstavlja na višino $z = 1$ dvignjeno polovico krožnice v središčni legi s polmerom 2 (tisto polovico, kjer je $y \geq 0$). Zato se ena od možnih parametrizacij glasi:

$$\begin{aligned}
x &= 2\cos\varphi \\
y &= 2\sin\varphi \\
z &= 1
\end{aligned}$$

Ker je to krivuljni integral 1. vrste, si poračunajmo še:

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{4\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi} = 2.$$

Tako dobimo:

$$\begin{aligned}
\int_C (x^2 + xy^3)\; ds &= \int_0^\pi \big((2\cos\varphi)^2 + 2\cos\varphi(2\sin\varphi)^3\big)2\; d\varphi = \\
&= 4\int_0^\pi \Big(\big(1+\cos(2\varphi)\big) + 2\sin(2\varphi)\big(1-\cos(2\varphi)\big)\Big)d\varphi = \\
&= 4\int_0^\pi \big(1+\cos(2\varphi) + 2\sin(2\varphi) - \sin(4\varphi)\big)d\varphi = \\
&= 4\bigg(\varphi + \frac{\sin(2\varphi)}{2} - \cos(2\varphi) + \frac{\cos(4\varphi)}{4}\bigg)\bigg|_0^\pi = \\
&= ... = 4\pi
\end{aligned}$$

Tekom računanja smo uporabili par znanih zvez: $2\cos^2\varphi = 1+\cos(2\varphi)$, $2\sin^2\varphi = 1-\cos(2\varphi)$, $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin(2\varphi)$ in $2\sin(2\varphi)\cos(2\varphi) = \sin(4\varphi)$, katerim se seveda lahko izognemo, če pogledamo izračun uporabljenih integralov kar v matematični priročnik.

4. S pomočjo Gaussove formule izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \big(3x + xz^2 - e^z\sin x,\; 2y - 4yz^2 + \arctan\big((x+z)^2\big),\; -4z + z^3 + e^z\cos x\big)$$

skozi rob območja, določenega z

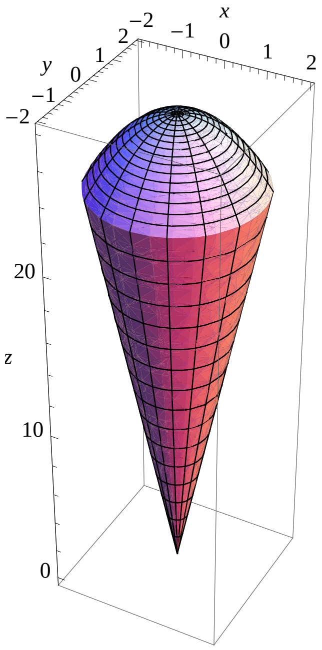
$$z \geq 12\sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{in} \qquad z \leq -x^2 - y^2 + 28.$$

Rešitev.
Za uporabo Gaussove formule si poračunajmo najprej divergenco našega vektorskega polja $\vec{V}$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{V} &= \frac{\partial(3x + xz^2 - e^z\sin x)}{\partial x} + \frac{\partial\Big(2y - 4yz^2 + \arctan\big((x+z)^2\big)\Big)}{\partial y} + \\
&\quad + \frac{\partial(-4z + z^3 + e^z\cos x)}{\partial z} = \\
&= (3 + z^2 - e^z\cos x) + (2 - 4z^2) + (-4 + 3z^2 + e^z\cos x) = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Naše telo je omejeno s stožcem in (navzdol obrnjenim) paraboloidom, ki se v cilindričnih koordinatah glasita $z = 12r$ in $z = 28 - r^2$.

Presečišče teh ploskev dobimo $12r = 28 - r^2$ oziroma $(r+14)(r-2) = 0$, kar nam da edino rešitev $r = 2$.



Z upoštevanjem vsega povedanega se iskani pretok vektorskega polja izračuna kot

$$
\begin{aligned}
\ldots &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{12r}^{28-r^2} r\,dz = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r(28 - r^2 - 12r)\,dr = \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-\frac{r^4}{4} + 14r^2 - 4r^3 \Big)\Big|_0^2\,d\varphi = \\
&= 20\,\varphi\Big|_0^{2\pi} = 40\pi
\end{aligned}
$$

5. Naj bo

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + 3x + 2y.$$

Določite $v(x,y)$, tako da bo funkcija

$$f(x+iy) := u(x,y) + iv(x,y)$$

analitična in bo veljalo $f(i) = 1$.

Rešitev.
Da bo funkcija $f = u + iv$ analitična, mora zadoščati Cauchy-Riemann-ovemu sistemu

enačb: $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
u_x(x, y) &= 2x + \frac{y}{x^2 + y^2} + 3 \\
u_y(x, y) &= -2y - \frac{x}{x^2 + y^2} + 2 \\
v(x, y) &= \int u_x \, dy = 2xy + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + 3y + C_1(x) \\
v(x, y) &= -\int u_y \, dx = 2xy + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - 2x + C_2(y) \\
v(x, y) &= 2xy + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - 2x + 3y + C
\end{aligned}$$

Ker mora veljati še $f(i) = 1$, torej $u(0, 1) = 1$ in $v(0, 1) = 0$, dobimo $3 + C = 0$ oziroma $C = -3$. Rešitev se tako glasi

$$v(x, y) = 2xy + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) - 2x + 3y - 3.$$