

IZPIT IZ MATEMATIKE III

8. september 2009

1. Podana je krivulja

$$\vec{r}(t) = (\sqrt{2} \operatorname{ch} t, \sin t + \cos t, \sin t - \cos t)$$

in točki $T_1(\sqrt{2}, 1, -1)$, $T_2\left(\frac{5\sqrt{2}}{4}, \sin(\log 2) + \cos(\log 2), \sin(\log 2) - \cos(\log 2)\right)$.

- (a) Določite enačbo tangentne premice na krivuljo $\vec{r}(t)$ v točki T_1 .
(b) Izračunajte dolžino loka krivulje $\vec{r}(t)$ med točkama T_1 in T_2 .

2. Izračunajte ploščino območja, določenega z

$$6\sqrt{\sin 3\varphi} \leq r \leq 6\sqrt{2} \sin 3\varphi.$$

Območje najprej skicirajte!

3. Določite parameter a tako, da bo krivuljni integral

$$\int_C \left(2x - \frac{a \cos z}{x}, \frac{z}{1 + y^2 z^2} + \frac{2 \cos z}{y}, \frac{y}{1 + y^2 z^2} - (a^2 - 2) \log(xy) \sin z \right) \cdot d\vec{r}$$

neodvisen od poti in ga za primer, ko je C poljubna krivulja od točke $T_1(1, 1, 1)$ do točke $T_2(2, \frac{1}{2}, 0)$, izračunajte.

4. Vzemimo točke $T_1(0, -1)$, $T_2(\pi, -1)$, $T_3(0, 1)$. S pomočjo Greenove formule izračunajte integral

$$\int_C \left(\frac{y^2}{x+1} - 2xy \right) dx + (2y \log(x+1) + 6y \cos x) dy,$$

kjer je krivulja C pozitivno orientirana in sestavljena iz daljice od točke T_1 do točke T_2 , krivulje $y = \cos x$ od točke T_2 do točke T_3 in daljice od točke T_3 do točke T_1 .

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z-2-2i|=\frac{5}{2}} \frac{8}{z(z-2)^3(z-2i)} dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.