Izpit Matematika III

7.9.2010

1. naloga

Dana sta valja $V1 : x^2 + y^2 = 2$ in $V2 : z = \sqrt{2 - y^2}$.

1. Zapišite parametrično enačbo presečišča valjev !
2. V točki $T(1, 1, 1)$ zapišite enačbo tangentne premice na presečno krivuljo !

Rešitev:

Najenostavnejši parameter je polarni kot φ :

$x = \sqrt{2}\cos\varphi\ ,\ y = \sqrt{2}\sin\varphi$

$z = \sqrt{2 - 2\sin^2\varphi} = \sqrt{2\cos^2\varphi} = \sqrt{2}|\cos\varphi|$

$$\boxed{\vec{r} = (\ \sqrt{2}\cos\varphi\ ,\ \sqrt{2}\sin\varphi\ ,\ \sqrt{2}|\cos\varphi|\ )}$$

Izračunamo parameter φ v dotikališču in tangetni vektor:

$(\ \sqrt{2}\cos\varphi\ ,\ \sqrt{2}\sin\varphi\ ,\ \sqrt{2}|\cos\varphi|\ ) = (1, 1, 1) \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$

$\dot{\vec{r}} = (\ -\sqrt{2}\sin\varphi\ ,\ \sqrt{2}\cos\varphi\ ,\ -\sqrt{2}\sin\varphi\ )$

$\vec{e} = \dot{\vec{r}}(\frac{\pi}{4}) = (-1, 1, -1)$

$$\boxed{\vec{r} = (1, 1, 1) + t(-1, 1, -1)}$$

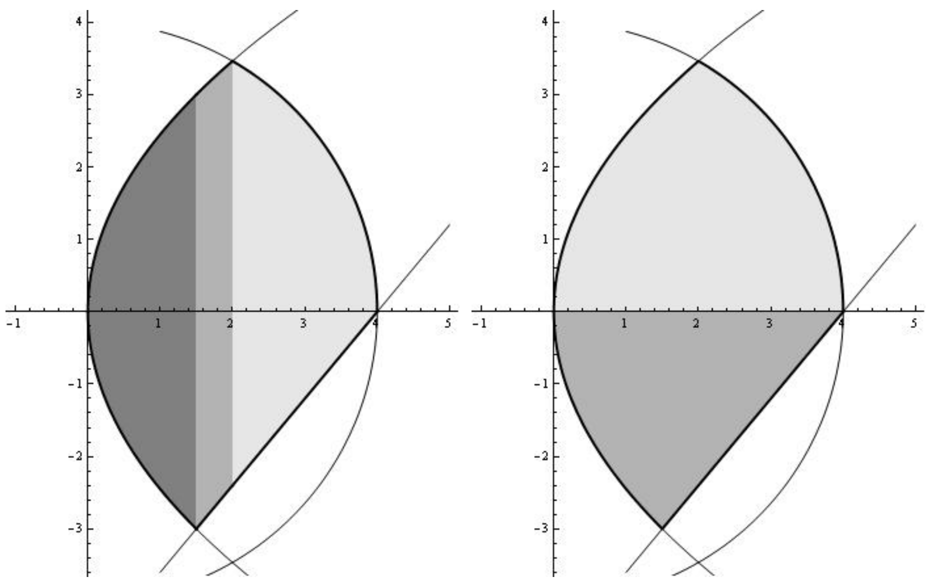
2. naloga

Integracijsko območje D dvojnega integrala je določeno z neenačbami

$$x^2 + y^2 < 16 \quad , \quad y^2 < 6x \quad , \quad 6x < 5y + 24$$

Izrazite dvojni integral $\int\int dxdy$ kot dvakratnega v obeh vrstnih redih integracije! Integralov ni potrebno izračunati.

Rešitev:



Eliminiramo $6x$ iz premice in parabole in poiščemo presečišče:
$y^2 = 5y + 24 \quad \rightarrow \quad (y+3)(y-8) = 0 \quad \rightarrow \quad y = -3\,,\ x = \frac{3}{2}$

Eliminiramo y^2 iz krožnice in parabole in poiščemo presečišče:
$x^2 + 6x = 16 \quad \rightarrow \quad (x+8)(x-2) = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2\,,\ y = \sqrt{12}$

Obe rešitvi se razbereta iz slik in podatkov.

$$I = \int_0^{\frac{3}{2}} dx \int_{-\sqrt{6x}}^{\sqrt{6x}} dy + \int_{\frac{3}{2}}^{2} dx \int_{\frac{6x-24}{5}}^{\sqrt{6x}} dy + \int_2^4 dx \int_{\frac{6x-24}{5}}^{\sqrt{16-x^2}} dy$$

$$I = \int_{-3}^{0} dy \int_{\frac{y^2}{6}}^{\frac{5}{6}y+4} dx + \int_0^{\sqrt{12}} dy \int_{\frac{y^2}{6}}^{\sqrt{16-y^2}} dx$$

3. naloga

Določite funkcijo ene neodvisne spremenljivke $f(t)$, tako da bo vektorsko polje

$$\vec{V} = (\ 3zf(xy)\ ,\ 2x^3yz\ ,\ xf(xy)\ )$$

potencialno !

Rešitev:

$$\mathrm{rot}\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3zf(xy) & 2x^3yz & xf(xy) \end{vmatrix} =$$

$$(\ x^2f'(xy) - 2x^3y\ ,\ 2f(xy) - xyf'(xy)\ ,\ 6x^2yz - 3xzf'(xy)\ ) = 0$$

$$f'(xy) = 2xy \quad \rightarrow \quad f'(t) = 2t \quad \rightarrow \quad f(t) = t^2 + C$$

$$2f(xy) = xyf'(xy) \quad \rightarrow \quad 2f(t) = tf'(t)$$

$$6xy = 3f'(xy) \quad \rightarrow \quad f'(t) = 2t \quad \rightarrow \quad f(t) = t^2 + C$$

Da bo še druga komponenta rotorja enaka 0, mora biti $C = 0$ in

$$\boxed{f(t) = t^2}$$

4. naloga

Poiščite površino na valju $V2$, ki jo izreže valj $V1$, kjer sta $V1$ in $V2$ valja iz 1.naloge.

Rešitev:

Uporabimo formulo za površino ploskve, ki je podana v eksplicitni obliki $z=\sqrt{2-y^2}$, prvi valj določa integracijsko območje $D: x^2+y^2<2$. Ker ima D krožno simetrijo, bomo vpeljali polarne koordinate. Pri vstavljanju spodnje meje $\varphi=0$ je treba uporabiti *l'Hospitalovo* pravilo.

$$P=\iint\limits_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\iint\limits_D \sqrt{1+\frac{y^2}{2-y^2}}\,dxdy=\iint\limits_D \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-y^2}}\,dxdy$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}\rho}{\sqrt{2-\rho^2\sin^2\varphi}}d\rho \;=4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{2-\rho^2\sin^2\varphi}\,\frac{-1}{\sin^2\varphi}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}$$

$$=4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\Big[\sqrt{2}\cos\varphi\,\frac{-1}{\sin^2\varphi}+\frac{\sqrt{2}}{\sin^2\varphi}\Big] \;=4\sqrt{2}\sqrt{2}\Big[\frac{1}{\sin\varphi}-\operatorname{ctg}\varphi\Big]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=8\Big[1-\lim_{\varphi\to 0}\tfrac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}\Big]=8\Big[1-\lim_{\varphi\to 0}\tfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\Big]=$$

$\boxed{8}$

5. naloga

V pozitivni smeri integracijske krivulje izračunajte kompleksni integral

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{\cos z}{(2z-\pi)^2 z^2}\, dz$$

Rešitev:

Obe singularni točki podintegralske funkcije $f(z) = \frac{\cos z}{(2z-\pi)^2 z^2}$ ležita znotraj integracijske krivulje. $z_1 = 0$ je pol 2.stopnje, $z_2 = \frac{\pi}{2}$ je pol 1.stopnje. Integral izračunamo z izrekom o residuih.

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{\cos z}{(2z-\pi)^2}\right]' = \lim_{z\to 0} \frac{-\sin z(2z-\pi)^2 - \cos z 2(2z-\pi)2}{(2z-\pi)^4} = \frac{-2(-\pi)2}{\pi^4} = \frac{4}{\pi^3}$$

$$\operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{(2z-\pi)^2 z^2}(z-\frac{\pi}{2}) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos z}{2z-\pi}\cdot\frac{1}{2z^2} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin z}{2}\cdot\frac{1}{2\frac{\pi}{2}^2} = \frac{-1}{2}\frac{2}{\pi^2} = \frac{-1}{\pi^2}$$

$$I = 2\pi i(\frac{4}{\pi^3} - \frac{1}{\pi^2}) = \boxed{i(\frac{8}{\pi^2} - \frac{2}{\pi})}$$