IZPIT IZ MATEMATIKE III

21. september 2010

1. Izračunajte dolžino loka krivulje

$$\vec{r}(t) = \left(t, 4\arcsin\frac{t}{4}, \log\frac{4+t}{4-t}\right), \quad 0 \le t \le 1.$$

Rešitev.

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \left(t, 4\arcsin\frac{t}{4}, \log\frac{4+t}{4-t}\right) = \\
&= \left(t, 4\arcsin\frac{t}{4}, \log(4+t) - \log(4-t)\right) \\
\dot{\vec{r}}(t) &= \left(1, \frac{4}{\sqrt{1-\frac{t^2}{16}}} \cdot \frac{1}{4}, \frac{1}{4+t} - \frac{1}{4-t} \cdot (-1)\right) = \\
&= \left(1, \frac{4}{\sqrt{16-t^2}}, \frac{8}{16-t^2}\right) \\
ds &= \sqrt{1 + \frac{16}{16-t^2} + \frac{64}{(16-t^2)^2}} = \sqrt{\frac{(24-t^2)^2}{(16-t^2)^2}} \\
s &= \int_0^1 \frac{24-t^2}{16-t^2} dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{8}{16-t^2}\right) dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{4-t} + \frac{1}{4+t}\right) dt = \\
&= \big(t - \log|4-t| + \log|4+t|\big)\Big|_0^1 = 1 - \log 3 + \log 5 = 1 + \log\frac{5}{3}
\end{aligned}$$

2. Vzemimo krivuljni integral

$$\int_{\mathcal{C}} (y-z)\, dx + (z-x)\, dy + (y-x)\, dz.$$

(a) Utemeljite, ali je gornji krivuljni integral neodvisen od poti.

(b) Izračunajte gornji krivuljni integral za primer, ko je krivulja $\mathcal{C}$ presek ploskev $x^2 + y^2 = 1$ in $x + z = 1$.

Rešitev.

(a) Omenjeni krivuljni integral bi bil neodvisen od poti, če bi bilo vektorsko polje $\vec{V} = (y - z, z - x, y - x)$ potencialno, kar je ekvivalentno, če bi bil rotor vektorskega polja $\vec{V}$ enak $\vec{0}$. Ker velja

$$\operatorname{rot}\vec{V} = (1-1, -1+1, -1-1) = (0, 0, -2) \neq \vec{0},$$

polje $\vec{V}$ ni potencialno in zato omenjeni integral NI neodvisen od poti.

(b) Krivuljo $\mathcal{C}$ lahko parametriziramo kot $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Tako velja $\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t)$. Po definiciji krivuljnih integralov 2. vrste se nam iskani integral prevede do

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int\limits_0^{2\pi} \big((\sin t - 1 + \cos t)(-\sin t) + (1 - 2\cos t)\cos t + (\sin t - \cos t)\sin t\big)dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\sin t - 2\sin t\cos t + \cos t - 2\cos^2 t\big)dt = \\
&= \int_0^{2\pi} \big(\sin t - \sin(2t) + \cos t - 1 - \cos(2t)\big)dt = \\
&= \ldots = -2\pi
\end{aligned}$$

3. S pomočjo Greenove formule izračunajte krivuljni integral

$$\int_{\mathcal{C}} (xy + x + y)\,dx + (xy - x - y)\,dy,$$

kjer je $\mathcal{C}$ krožnica $x^2 + y^2 = 1$ orientirana negativno.

Rešitev.

Po Greenovi formuli se nam iskani integral prevede do

$$\ldots = -\iint_{\mathcal{D}} (y - 1 - x - 1)\,dx\,dy,$$

kjer je minus pred integralom zaradi negativne orientacije krivulje $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ predstavlja krog $x^2 + y^2 \leq 1$. Za izračun dobljenega integrala uvedimo polarne koordinate in dobimo

$$\begin{aligned}
\ldots &= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \big(-2 - r\cos\varphi + r\sin\varphi\big) r\,dr = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(r^2 + \frac{r^3}{3}\cos\varphi - \frac{r^3}{3}\sin\varphi\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{3}\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\right) d\varphi = \\
&= \ldots = 2\pi
\end{aligned}$$

4. Izračunajte kompleksni integral

$$\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\sin z^2}{z^3\left(z-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2}\,dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev.
Singularnosti, ki ležita znotraj krivulje, sta $z=0$ in $z=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, kjer je $z=0$ pol prve stopnje (saj je $z=0$ ničla druge stopnje števca), $z=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ pa pol druge stopnje (da $z=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ leži znotraj krožnice $|z|=\frac{3}{2}$ sledi takoj iz dejstva $\frac{\pi}{2}<\frac{9}{4}$). Tako računamo:

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z^2}{z^3\left(z-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z^2}{z^2\left(z-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2} = \frac{2}{\pi}$$

$$\operatorname{res}_{z=\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{\sin z^2}{z^3\left(z-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2} = \lim_{z\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{\sin z^2}{z^3}\right)' = \lim_{z\to\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(z^2)\cdot 2z\cdot z^3-\sin(z^2)\cdot 3z^2}{z^6} =$$

$$= \ldots = -\frac{12}{\pi^2}$$

Opomba: Tekom računanja smo upoštevali dejstvo $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sin z^2}{z^2}=1$. Iskani integral je tako enak

$$2\pi i\left(\frac{2}{\pi}-\frac{12}{\pi^2}\right).$$

5. Kam se s preslikavo

$$f(z)=\frac{z^2+4i}{z^2}$$

preslika območje

$$D=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;0\le \arg z\le \frac{\pi}{4}, |z|\le 2\right\}?$$

Rešitev.
Takoj vidimo, da je naša preslikava kompozitum preslikave $w=z^2$ in Möbiusove transformacije $\frac{w+4i}{w}$. Preslikava $w=z^2$ preslika najprej območje $\mathcal{D}$ v tisto četrtino kroga v središčni legi s polmerom 4, ki leži v 1. kvadrantu (kvadriranje kompleksnega števila namreč podvoji kot in skvadrira velikost). Za Möbiusove transformacije pa vemo, da ohranjajo družino premic in krožnic (ter ohranjajo kote in orientacijo). Ker s $\frac{w+4i}{w}$ dobimo $4\mapsto 1+i$, $2\mapsto 1+2i$ in $0\mapsto\infty$, sledi, da se daljica od točke 4 do točke 0 preslika v poltrak od točke $1+i$ preko točke $1+2i$ v neskončnost (in zaradi orientacije je naše območje desno od tega poltraka). Ker $4i\mapsto 2$, $2i\mapsto 3$ in $0\mapsto\infty$, se daljica od točke $4i$ do točke 0 preslika v poltrak od točke 2 preko točke 3 v neskončnost (in zaradi orientacije je naše območje nad tem poltrakom). Da

ugotovimo, kaj je še slika preostalega dela krožnice, si recimo pogledamo $-4i \mapsto 0$ (od prej pa že imamo $4 \mapsto 1+i$ in $4i \mapsto 2$). Ker dobljene tri točke niso kolinearne, smo torej po prej povedanem morali dobiti krožnico (in iz dobljenih točk vidimo, da je to krožnica s središčem v 1 in polmerom enakim 1). Iz napisanega torej sledi, da se manjakoči del krožnice preslika v del dobljene krožnice od točke 2 do točke $1+i$ (in zaradi orientacije dobimo, da je naše območje izven dobljene krožnice). Za lažjo predstavo dobljenih območij glej spodnje slike.