1. naloga

Dani sta ploskvi $z = 1 - y^2$ in $z = 2x^2 + y^2$.

1. Zapišite parametrično enačbo presečišča ploskev!
   Namig: parameter - polarni kot φ .

2. Pod kakšnim kotom se sekata ploskvi v točki z največjo koordinato y ?

Rešitev:

Izenačimo ploskvi in v preseku velja $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

$\vec{r}(\varphi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\,,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\,,\ 1 - \frac{1}{2}\sin^2\varphi\right)$

Točka z največjo koordinato y se dobi za $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $\quad T(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$

$\cos\alpha = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{(0,2y,1)\cdot(4x,2y,-1)}{\sqrt{4y^2+1}\sqrt{16x^2+4y^2+1}} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$

$\boxed{\alpha = \arccos\frac{1}{3}}$

2. naloga

Z vpeljavo spremenljivk $x = u$, $\frac{y}{x} = v$ izračunajte dvojni integral

$$\iint\limits_D \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} \, dxdy \quad ,$$

kjer je integracijsko območje trikotnik z oglišči $A(0,0)$, $B(1, -\frac{\pi}{4})$, $C(1, \frac{\pi}{4})$!

Rešitev:

Jacobijeva determinanta za nove spremenljivke $x = u$, $y = uv$:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u$$

Integracijsko območje trikotnik A, B, C se preslika v pravokotnik $0 < u < 1$, $-\frac{\pi}{4} < v < \frac{\pi}{4}$

$$\iint\limits_D \frac{y}{x} \sin \frac{y}{x} \, dxdy =$$

$$\int\limits_0^1 u \, du \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} v \sin v \, dv \; =$$

$$\frac{u^2}{2}\Bigg|_0^1 \cdot 2\Big(-v \cos v + \sin v\Big)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 - \frac{\pi}{4}\Big)}$$

3. naloga

Izračunajte trojni integral

$$\iiint\limits_V x^2\, dxdydz \quad ,$$

kjer je integracijsko območje določeno z neenačbami

$$x^2 + y^2 < 2 \quad , \quad 0 < z < 1 + 3(x^2 + y^2) \quad !$$

Rešitev:

Integral izračunamo v cilindričnih koordinatah

$$\iiint\limits_V x^2\, dxdydz =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r dr \int\limits_0^{1+3r^2} r^2 \cos^2 \varphi dz =$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3 (1 + 3r^2) dr =$$

$$\tfrac{1}{2}\Big(\varphi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\Big)\Bigg|_0^{2\pi} \cdot \Big(\tfrac{r^4}{4} + 3\tfrac{r^6}{6}\Big)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} =$$

$$\pi(1 + \tfrac{8}{2}) = \boxed{5\pi}$$

4. naloga

Določite kompleksno število w tako, da bo $z = i \ln 2$ *odpravljiva* singularna točka funkcije

$$f(z) = \frac{\sin(z) - w}{z^2 + \ln^2 2} \quad !$$

Rešitev:

V imenovalcu je pri $z = i \ln 2$ ničla 1. stopnje.
Zato mora biti ničla tudi v števcu.

$w = \sin(i \ln 2) =$

$\frac{e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}}{2i} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{2i} =$

$\boxed{\frac{3}{4} i}$

5. naloga

Z vpeljavo kompeksne spremenljivke $e^{i\varphi} = z$ izračunajte integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 + 3\sin\varphi)} \qquad !$$

Rešitev:

$e^{i\varphi} i d\varphi = dz \quad \longrightarrow \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}$
$\sin z = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$
Integracijska krivulja je enotni krog v pozitivni smeri

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(5 + 3\sin\varphi)} \quad =$$

$$\int_C \frac{dz}{iz\left(5 + 3\frac{z^2-1}{2iz}\right)} =$$

$$\int_C \frac{2dz}{10iz + 3z^2 - 3}$$

Singularne točke funkcije $f(z) = \frac{2}{10iz+3z^2-3}$:
$z_{1,2} = \frac{-10i \pm \sqrt{-100+36}}{6} = \frac{-10i \pm 8i}{6}$
Znotraj enotnega kroga je pol 1.stopnje $z_1 = -\frac{i}{3}$
Uporabimo izrek o *residuih*

$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \frac{2}{(10iz+3z^2-3)'}\Bigg|_{z=z_1} =$
$2\pi i \frac{2}{10i+6(-\frac{i}{3})} = \frac{4\pi i}{8i} =$

$\boxed{\frac{\pi}{2}}$