

1. naloga

Dana je krivulja $\vec{r} = (t - 1, 2t, 2t^2 - t - 2)$.

- Poiščite presečišče krivulje s ploskvijo $z = xy$!
- V presečišču zapišite enačbo tangente premice na krivuljo !

Rešitev:

$$z = xy$$

$$2t^2 - t - 2 = 2t^2 - 2t$$

$$t = 2$$

$$\boxed{P(1, 4, 4)}$$

$$\dot{\vec{r}} = (1, 2, 4t - 1)$$

$$\vec{e} = (1, 2, 7)$$

$$\boxed{\vec{r} = (1 + t, 4 + 2t, 4 + 7t)}$$

2. naloga

Z dvojnim integralom v polarnih koordinatah izračunajte ploščino območja določenega z neenačbama $r < 4(1 + \cos \varphi)$, $x > 3$!

Rešitev:

Območje je znotraj srčnice in desno od premice $x = 3$.

Zapišemo enačbo premice v polarnih koordinatah in poiščemo presečišča.

$$4(1 + \cos \varphi) = \frac{3}{\cos \varphi}, \quad \cos \varphi = t$$

$$4t^2 + 4t - 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$P = 2 \int_0^{\pi/3} d\varphi \int_{3/\cos \varphi}^{4(1+\cos \varphi)} r dr = \int_0^{\pi/3} \left[16(1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) - \frac{9}{\cos^2 \varphi} \right] d\varphi =$$

$$16 \left(\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) - 9 \operatorname{tg} \varphi \Big|_0^{\pi/3} =$$

$$16 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{4} \right) - 9\sqrt{3} = \boxed{8\pi + 9\sqrt{3}}$$

3. naloga

Izračunajte krivuljni integral

$$\int_C xdx - ydy + zdz \quad ,$$

kjer je integracijska krivulja polkrožnica

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 &= 4 \\x + y &= 2 \\z &> 0\end{aligned}$$

v smeri od točke $A(2, 0, 0)$ do točke $B(0, 2, 0)$!

Rešitev:

Izberemo najenostavnejšo parametrizacijo integracijskekrivulje:

$$x = t$$

$$y = 2 - t$$

$$z = \sqrt{4 - t^2 - (2 - t)^2} = \sqrt{4t - 2t^2}$$

$$I = \int_2^0 \left[t - (2 - t)(-1) + \sqrt{4t - 2t^2} \frac{4 - 4t}{2\sqrt{4t - 2t^2}} \right] dt =$$

$$\int_2^0 (2 + 2 - 2t) dt = 4t - t^2 \Big|_2^0 = -(8 - 4) = \boxed{-4}$$

4. naloga

Z uporabo *residuov* izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx \quad !$$

Rešitev:

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} \frac{z^2}{(z^2 + 4)^2} = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2i} \left[\frac{z^2}{(z - 2i)^2(z + 2i)^2} (z - 2i)^2 \right]' =$$

$$2\pi i \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{2z(z + 2i)^2 - z^2 \cdot 2(z + 2i)}{(z + 2i)^4} = 2\pi i \frac{-16 \cdot 4i + 4 \cdot 2 \cdot 4i}{4^4} = 2\pi i \frac{-8 \cdot 4i}{4^4} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

5. naloga

Poiščite in narišite območje v katerega preslika funkcija $w = \frac{4z}{z+i}$ zgornjo polravnino !

Rešitev:

Rob zgornje polravnine je realna os, zato najprej poiščemo sliko realne osi. Ker *Linearna lomljena preslikava* ohranja premice/krožnice, bo tudi slika realne osi krivulja istega tipa; le-ta pa je natanko določena s tremi točkami. Poljubno izberemo tri točke na realni osi in poiščemo kam se preslikajo:

$$\begin{array}{rcl} 0 & \longrightarrow & 0 \\ 1 & \longrightarrow & 2 - 2i \\ \infty & \longrightarrow & 4 \end{array}$$

Slika realne osi bo torej prava krožnica skozi točke 0 , $2 - 2i$, 4 . Število i , ki leži znotraj zgornje polravnine, se preslika v 2 , ki je središče krožnice. Zato je iskana slika notranjost krožnice.

