IZPIT IZ MATEMATIKE III

14. februar 2011

1. Vzemimo krivuljo
$$\vec{r}(t) = \left(t + \frac{4}{t}, t - \frac{4}{t}, 4\ln t\right).$$

   (a) Izračunajte dolžino loka krivulje $\vec{r}(t)$ od točke $A(5, -3, 0)$ do točke $B(4, 0, 4\ln 2)$.

   (b) Poiščite točko na krivulji $\vec{r}(t)$, v kateri je tangentna premica pravokotna na ravnino $y + z = 0$.

   Rešitev. Za obe točki (a) in (b) potrebujemo tangentni vektor, zato si ga poračunajmo kar vnaprej.
$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(1 - \frac{4}{t^2}, 1 + \frac{4}{t^2}, \frac{4}{t}\right)$$

   (a) Hitro vidimo (iz recimo primerjanja zadnjih komponent), da $\vec{r}(t)$ doseže točko A pri $t_A = 1$ in točko B pri $t_B = 2$. Tako dobimo
$$\begin{aligned} s &= \int_1^2 \sqrt{\left(1 - \frac{4}{t^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{4}{t^2}\right)^2 + \frac{16}{t^2}}\, dt = \\ &= \int_1^2 \sqrt{2 + \frac{32}{t^4} + \frac{16}{t^2}}\, dt = \int_1^2 \sqrt{2\left(1 + \frac{4}{t^2}\right)^2}\, dt = \\ &= \int_1^2 \sqrt{2}\left|1 + \frac{4}{t^2}\right| dt = \sqrt{2}\int_1^2 \left(1 + \frac{4}{t^2}\right) dt = \\ &= \sqrt{2}\left(t - \frac{4}{t}\right)\Bigg|_1^2 = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

   (b) Normala ravnine $y + z = 0$ je enaka $\vec{n} = (0, 1, 1)$. Ker mora biti tangentni vektor $\dot{\vec{r}}(t)$ pravokoten na dano ravnino, pomeni, da mora biti $\dot{\vec{r}}(t)$ vzporeden z normalo $\vec{n}$. Tako dobimo sistem enačb:
$$1 - \frac{4}{t^2} = 0, \quad 1 + \frac{4}{t^2} = k, \quad \frac{4}{t} = k.$$

   Iz prve enačbe takoj sledi $t^2 = 4$, nato iz druge $k = 2$ in tako iz tretje enačbe dobimo končno rešitev $t = 2$. Iskana točka je tako $\vec{r}(2) = (4, 0, 4\ln 2)$, kar je v resnici kar točka B.

2. Zamenjajte vrstni red integriranja:

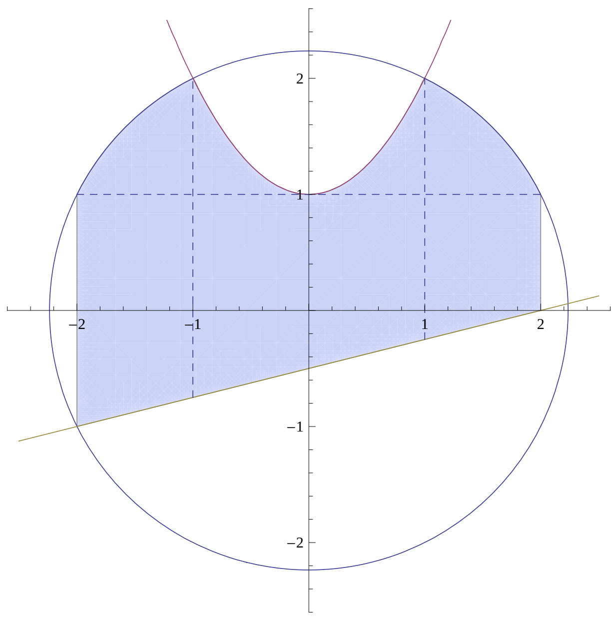
$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-2}^{4y+2} dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-2}^{2} dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{5-y^2}}^{-\sqrt{y-1}} dx + \int_{1}^{2} dy \int_{\sqrt{y-1}}^{\sqrt{5-y^2}} dx$$

Integracijsko območje obvezno skicirajte. Dobljenega integrala nato ni potrebno izračunati.

Rešitev. Iz notranjih mej integralov vidimo, da so mejne krivulje našega integracijskega območja enake

$$
\begin{aligned}
&x = -2 && && \\
&x = 4y + 2 && \to && y = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \\
&x = 2 && && \\
&x = \pm\sqrt{5 - y^2} && \to && y = \pm\sqrt{5 - x^2} \\
&x = \pm\sqrt{y - 1} && \to && y = x^2 + 1
\end{aligned}
$$

Z dodatnim upoštevanjem zunanjih mej je slika integracijskega območja enaka:



Zamenjan vrstni red integriranje je tako enak

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{\frac{x}{4}-\frac{1}{2}}^{\sqrt{5-x^2}} dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{\frac{x}{4}-\frac{1}{2}}^{x^2+1} dy + \int_{1}^{2} dx \int_{\frac{x}{4}-\frac{1}{2}}^{\sqrt{5-x^2}} dy$$

3. Določite parameter a, da bo krivuljni integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{2y}{4x^2+y^2}\,dx + \left(z\,e^{yz} - \frac{(a^2+1)x}{4x^2+y^2}\right) dy + (a+2)^2\,y\,e^{yz}\,dz$$

neodvisen od poti. Za dobljeni a in primer, ko je $\mathcal{C}$ krivulja od točke $A(1,-2,0)$ do točke $B(0,1,1)$, integral tudi izračunajte.

Rešitev. Dani integral bo neodvisen od poti, ko bo rotor vektorskega polja

$$\vec{V} = \left(\frac{2y}{4x^2+y^2},\, z\,e^{yz} - \frac{(a^2+1)x}{4x^2+y^2},\, (a+2)^2\,y\,e^{yz}\right)$$

enak $\vec{0}$. Tako dobimo, da mora veljati

$$\left(e^{yz}\big(a^2+4a+3\big)(yz+1),\ 0,\ \frac{\big(a^2-1\big)\big(4x^2-y^2\big)}{\big(4x^2+y^2\big)^2}\right) = (0,0,0)$$

oziroma $(a+3)(a+1)=0$ in $(a+1)(a-1)=0$, kar da iskano rešitev $a=-1$.

Za izračun integrala si najprej poračunajmo potencial vektorskega polja $\vec{V}$.

$$\begin{aligned}
u &= \int \frac{2y}{4x^2+y^2}\,dx = \arctan\frac{2x}{y} + C_1(y,z)\\
u &= \int \left(z\,e^{yz} - \frac{2x}{4x^2+y^2}\right) dy = e^{yz} - \arctan\frac{y}{2x} + C_2(x,z) =\\
&= e^{yz} + \arctan\frac{2x}{y} + D_2(x,z)\\
u &= \int y\,e^{yz}\,dz = e^{yz} + C_3(x,y)\\
u &= e^{yz} + \arctan\frac{2x}{y} + C
\end{aligned}$$

Iskan integral je tako enak

$$u(B) - u(A) = e - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = e - 1 + \frac{\pi}{4}.$$

4. Vzemimo točke $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,-1)$. S pomočjo Greenove formule izračunajte krivuljni integral

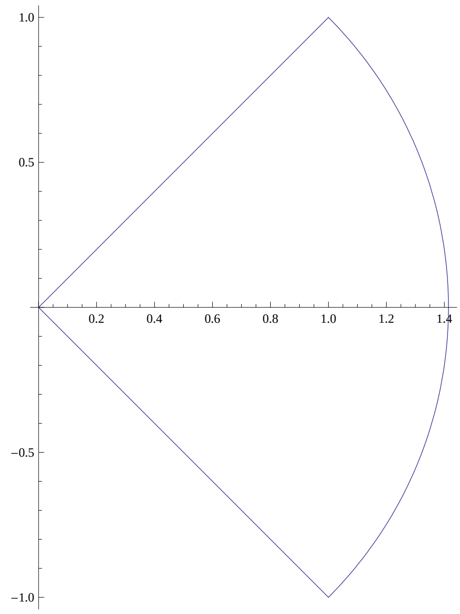
$$\int_{\mathcal{C}} \big(xy+y+x^3\big)dx + \big(3xy-x-x^2\big)dy,$$

kjer je krivulja $\mathcal{C}$ sestavljena iz daljice od točke A do točke B, krajšega dela krožnice $x^2+y^2=2$ od točke B do točke C in daljice od točke C do točke A.

Rešitev. Sledimo navodilu in uporabimo Greenovo formulo

$$... = -\iint_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial\big(3xy - x - x^2\big)}{\partial x} - \frac{\partial\big(xy + y + x^3\big)}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_{\mathcal{D}} (2 + 3x - 3y)\, dx\, dy$$

Minus pred dvojnim integralom je zaradi negativne orientiranosti krivulje $\mathcal{C}$. Slika krivulje $\mathcal{C}$ (in pripadajočega območja $\mathcal{D}$) je



Po uvedbi polarnih koordinat tako dobimo

$$\begin{aligned}
... &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (2 + 3r\cos\varphi - 3r\sin\varphi) r dr = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(r^2 + r^3\cos\varphi - r^3\sin\varphi\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(2 + 2\sqrt{2}\cos\varphi - 2\sqrt{2}\sin\varphi\right) d\varphi = \\
&= \left(2\varphi + 2\sqrt{2}\sin\varphi + 2\sqrt{2}\cos\varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \\
&= ... = \pi + 4
\end{aligned}$$

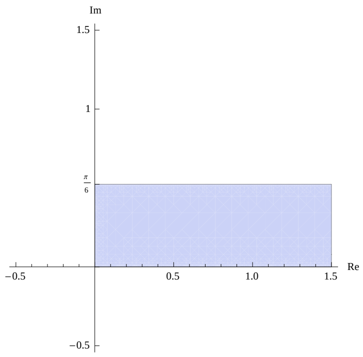
5. Kam se s preslikavo

$$f(z) = \frac{e^{3z} - 1}{e^{3z} + 1}$$

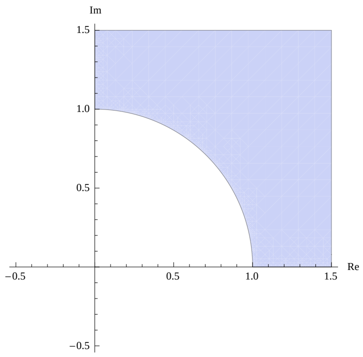
preslika območje

$$\mathcal{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; x > 0,\ 0 < y < \frac{\pi}{6} \right\}?$$

Rešitev. Opazimo, da je $f(z)$ kompozitum preslikave $z \mapsto w = e^{3z}$ in Möbiusove transformacije $w \mapsto \frac{w-1}{w+1}$. Začetno območje $\mathcal{D}$ je enako:



Ob dejstvu $e^{3z} = e^{3x+3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i \sin 3y)$ in omejitvah $x > 0$ ter $0 < y < \frac{\pi}{6}$ takoj vidimo, da je slika našega območja $\mathcal{D}$ s preslikavo $z \mapsto e^{3z}$ enaka tistemu delu, kjer velja $r > 1$ in $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$:



Preslikava $w \mapsto \frac{w-1}{w+1}$ je, kot rečeno, Möbiusova transformacija, kar pomeni, da ohranja družino premic in krožnic (ter ohranja kote in orientacijo). Zato je za vsak del premice ali krožnice dovolj pogledati sliko treh točk. Če pogledamo recimo $1 \mapsto 0$, $0 \mapsto -1$, $\infty \mapsto 1$, $i \mapsto i$, $-1 \mapsto \infty$, vidimo, da se naš poltrak od 1 do ∞ preslika v daljico od 0 do 1, dani del krožnice od i do 1 v daljico od i do 0 in dani poltrak od i do ∞ v krajši del krožnice $x^2 + y^2 = 1$ od i do 1. Ob dodatnem upoštevanju orientacije je iskano območje tako enako