1. naloga

S pomočjo odvajanja na parameter izračunajte integral

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2} - e^{-2x^2}}{x}\, dx \quad , \quad a > 0 \quad !$$

Rešitev:

$$F'(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}(-x^2)}{x}\, dx \; = \frac{e^{-ax^2}}{2a}\bigg|_0^\infty = -\tfrac{1}{2a}$$

$$F(a) = -\int \frac{da}{2a} = -\tfrac{1}{2}\ln a + C$$

$$F(2) = 0 \quad \longrightarrow \quad C = \tfrac{1}{2}\ln 2$$

$$\boxed{F(a) = \frac{1}{2}\ln\frac{2}{a}}$$

2. naloga

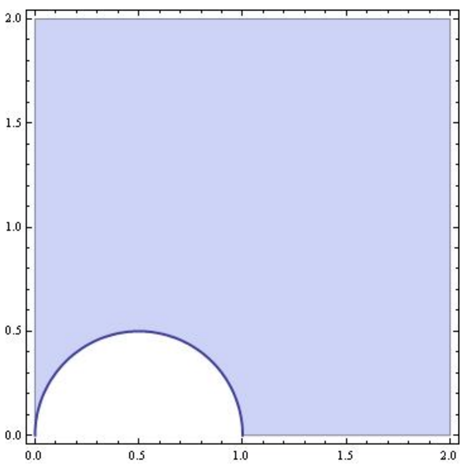
Z vpeljavo polarnih koordinat izračunajte dvojni integral

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^2} \quad ,$$

kjer je integracijsko območje $D : x > 0\ ,\ y > 0\ ,\ x^2 + y^2 > x$!

Rešitev:

Integracijsko območje je prvi kvadrant zunaj krožnice $r = \cos\varphi$:



$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2+1)^2} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{\infty} \frac{r}{(r^2+1)^2} dr \ = \ -\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \ \frac{1}{r^2+1}\Bigg|_{\cos\varphi}^{\infty} =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+1} \ = \frac{1}{2}\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\ \arcsin\left(\frac{1-3\cos^3\varphi}{1+\cos^2\varphi}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big) = \boxed{\frac{\pi}{4\sqrt{2}}}$$

3. naloga

Izračunajte odvod skalarnega polja $u = yz - x^2$ v točki $T(\sqrt{11}, 3, 4)$ v smeri zunanje normale na sfero $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ v točki T!

Rešitev:

$\operatorname{grad} u = (-2x, z, y)$

$\operatorname{grad} u(T) = (-2\sqrt{11}, 4, 3)$

Normala na sfero $\vec{\nu} = (2x, 2y, 2z)$

$\vec{\nu}(T) = (2\sqrt{11}, 6, 8)$

Odvod v smeri $\vec{l} = (2\sqrt{11}, 6, 8)/12$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u(T) \cdot \vec{l} = (-2\sqrt{11}, 4, 3) \cdot (\sqrt{11}, 3, 4)/6 = \boxed{\tfrac{1}{3}}$$

4. naloga

Izračunajte ploskovni integral

$$\iint\limits_S z dS \quad ,$$

kjer je integracijska ploskev $S : z = 2 - \frac{x^2+y^2}{2}$, $z > \frac{1}{2}$!

Rešitev:

Ploskev parametriziramo s parametroma ρ in φ iz *cilindričnih koordinat.*

$\vec{r} = (\, \rho\cos\varphi \ , \ \rho\sin\varphi \ , \ 2 - \rho^2/2\,)$

$\vec{r}_\rho = (\, \cos\varphi \ , \ \sin\varphi \ , \ -\rho\,)$

$\vec{r}_\varphi = (\, -\rho\sin\varphi \ , \ \rho\cos\varphi \ , \ 0\,)$

$E = \vec{r}_\rho \cdot \vec{r}_\rho = 1 + \rho^2$
$G = \vec{r}_\varphi \cdot \vec{r}_\varphi = \rho^2$
$F = \vec{r}_\rho \cdot \vec{r}_\varphi = 0$
$dS = \sqrt{EG - F^2} d\rho d\varphi = \rho\sqrt{1+\rho^2} d\rho d\varphi$

Iz pogoja $2 - \rho^2/2 > \frac{1}{2}$ se dobi zgornjo mejo za ρ enako $\sqrt{3}$

$$\iint\limits_S z dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \Big(2 - \frac{\rho^2}{2}\Big) \sqrt{1+\rho^2}\rho \, d\rho \ = \dots$$

Integracija po φ prinese faktor 2π
V integralu po ρ se vpelje nova spremenljivka $1 + \rho^2 = t$

$$\dots = 2\pi \int_1^4 \Big(2 - \frac{t-1}{2}\Big) \sqrt{t} \, \frac{1}{2} dt \ = \dots = \boxed{\frac{82}{15}\pi}$$

5. naloga

V funkcijah $u = axy^3 + bx^3y$ in $v = x^4 + cx^2y^2 + y^4$ določite realne konstante a, b, c tako, da bo funkcija $u + iv$ *analitična* !

Rešitev:

Zapišemo *Cauchy-Riemannovi* enačbi :

$$u_x = v_y \quad \longrightarrow \quad ay^3 + 3bx^2y = 2cx^2y + 4y^3$$
$$u_y = -v_x \quad \longrightarrow \quad 3axy^2 + bx^3 = -4x^3 - 2cxy^2$$

Enačbi morata veljati pri poljubnih x in y, zato se morajo koeficienti na obeh straneh ujemati:

$a = 4$, $3b = 2c$, $3a = -2c$, $b = -4$

$$\boxed{a = 4\ ,\ b = -4\ ,\ c = -6}$$