IZPIT IZ MATEMATIKE III

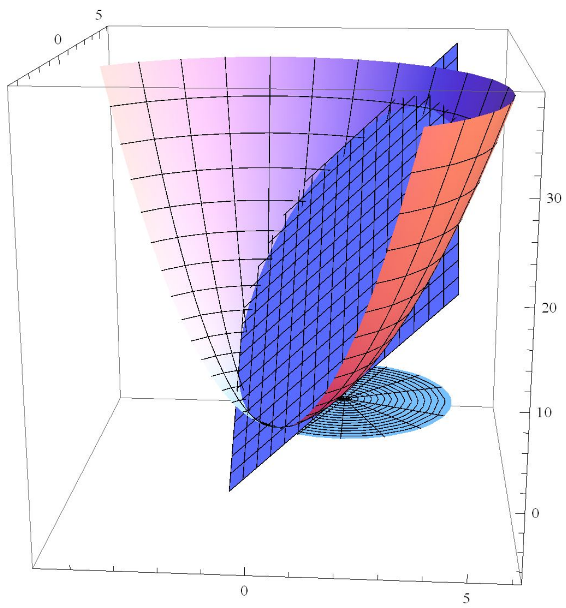
11. junij 2012

1. Izračunajte
$$\int_{\mathcal{C}} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz,$$
kjer je krivulja $\mathcal{C}$ enaka preseku ploskev $x^2+y^2=1$ in $x+z=1$ ter orientirana v pozitivni smeri gledano iz koordinatnega izhodišča.

   Rešitev. Glede na ploskvi in orientiranost lahko krivuljo $\mathcal{C}$ parametriziramo kot
$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1-\cos t), \quad t: 2\pi \to 0$$
$$\dot{\vec{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t)$$
in tako se integral prevede do:
$$\ldots = \int_{2\pi}^{0} \big((\sin t - 1 + \cos t)(-\sin t) + (1-2\cos t)\cos t + (\cos t - \sin t)\sin t\big) dt$$
$$= \int_{2\pi}^{0} (\sin t + \cos t - 2)\, dt = 4\pi.$$

2. Izračunajte površino tistega dela ravnine $z = 4x+4y$, ki ga izreže paraboloid $z = x^2+y^2$.

   Rešitev.



Rob projekcije omenjenega dela ravnine je $x^2+y^2=4x+4y$ oziroma

$$(x-2)^2+(y-2)^2=8,$$

kar se v polarnih koordinatah glasi $r=4(\cos\varphi+\sin\varphi)$.
Zaradi

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+16+16}=\sqrt{33}$$

se iskana površina izračuna kot

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{4(\cos\varphi+\sin\varphi)} \sqrt{33}\, r\, dr = 8\sqrt{33}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos\varphi+\sin\varphi)^2 d\varphi \\
&= 8\sqrt{33}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (1+\sin 2\varphi) d\varphi = 8\sqrt{33}\left(\varphi-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \\
&= 8\sqrt{33}\,\pi
\end{aligned}$$

3. Vzemimo skalarno polje

$$F=\arctan(xy)+e^{z^2-y}+2x+2z,$$

in točko $T(0,0,0)$ ter označimo $\vec{V}=\operatorname{grad} F$.

a) Poiščite nivojsko ploskev skalarnega polja F, ki gre skozi točko T.
b) Izračunajte smerni odvod skalarnega polja F v točki T gledano v smeri najhitrejšega spreminjanja.
c) Koliko je $\operatorname{rot}\vec{V}$?

Rešitev.

a) Za nivojske ploskve velja $F=C$. Ker $F(0,0,0)=1$, se iskana ploskev glasi $\arctan(xy)+e^{z^2-y}+2x+2z=1$.
b) Skalarna polja se najhitreje spreminjajo v smeri gradienta.

$$\operatorname{grad} F=(F_x,F_y,F_z)=\left(\frac{y}{1+x^2y^2}+2, \frac{x}{1+x^2y^2}-e^{z^2-y}, 2ze^{z^2-y}+2\right)$$
$$\operatorname{grad} F(T)=(2,-1,2)$$

Tako se iskani smerni odvod glasi

$$\operatorname{grad} F(T)\cdot\frac{\operatorname{grad} F(T)}{|\operatorname{grad} F(T)|}=|\operatorname{grad} F(T)|=\sqrt{4+1+4}=3.$$

c) Rotor potencialnih vektorskih polj je enak $\vec{0}$. Drugače povedano

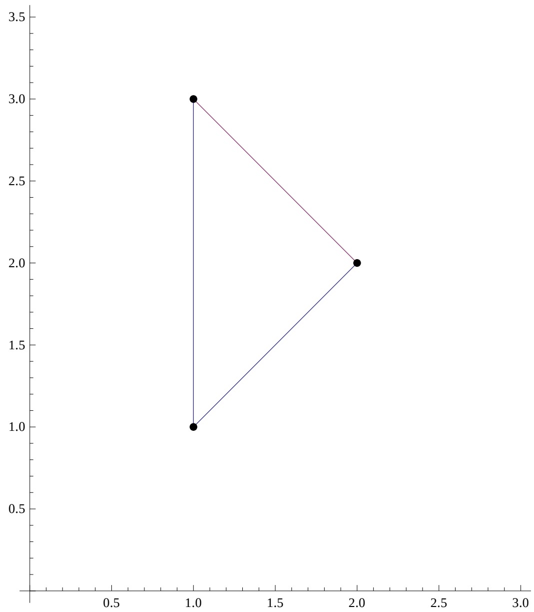
$$\operatorname{rot} \vec{V} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} F = \vec{0}.$$

4. S pomočjo Greenove formule izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} 6(x^2+y^2)dx + 3(x+y)^2 dy,$$

kjer je $\mathcal{C}$ pozitivno orientirana krivulja, ki je sestavljena iz daljic med točkami $A(1,1) \to B(2,2) \to C(1,3) \to A(1,1)$.

Rešitev. $P = 6(x^2+y^2)$, $Q = 3(x+y)^2$ zato $Q_x - P_y = 6(x+y) - 12y = 6x - 6y$.



S pomočjo Greenove formule se iskani integral tako prevede do

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} 6(x^2+y^2)dx + 3(x+y)^2 dy &= \int_1^2 dx \int_x^{4-x} (6x-6y)dy \\
&= \int_1^2 \big(6xy - 3y^2\big)\Big|_x^{4-x} dx = \int_1^2 (-12x^2 + 48x - 48)dx \\
&= \big(-4x^3 + 24x^2 - 48x\big)\Big|_1^2 \\
&= -4.
\end{aligned}$$

5. S pomočjo kompleksne integracije izračunajte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{20}{(x^2+4)(x^2-2x+2)}\, dx.$$

Rešitev. Označimo $f(x) = \frac{20}{(x^2+4)(x^2-2x+2)}$.

$$\begin{aligned} x^2+4=0 &\quad \to \quad x_{1,2} = \pm 2i \\ x^2-2x+2=0 &\quad \to \quad x_{1,2} = 1 \pm i \end{aligned}$$

Singularnosti $f(x)$ v zgornji polravnini sta tako le $x = 2i$ in $x = 1+i$.

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{x=2i} f(x) &= \lim_{x\to 2i} \frac{20}{(x+2i)(x-1-i)(x-1+i)} = \ldots = 1 + \frac{i}{2} \\ \operatorname{res}_{x=1+i} f(x) &= \lim_{x\to 1+i} \frac{20}{(x-2i)(x+2i)(x-1+i)} = \ldots = -1-2i \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx &= 2\pi i \big(\operatorname{res}_{x=2i} f(x) + \operatorname{res}_{x=1+i} f(x) \big) \\ &= 2\pi i \left(1 + \frac{i}{2} - 1 - 2i \right) = 3\pi. \end{aligned}$$