IZPIT IZ MATEMATIKE III

9. februar 2012

1. Vzemimo skalarno polje $F(x,y,z) = z^2 - e^{\frac{x}{y}} + \cos(xy)$, točko $T(0,-1,1)$ in krivuljo $\vec{r}(t) = \big(\sin(t^2), -e^t \tan t, t^2 - t^4\big)$.

   (a) Poiščite smerni odvod skalarnega polja F v točki T v smeri najhitrejšega spreminjanja.

   (b) Izračunajte nivojsko ploskev skalarnega polja F, ki gre skozi točko T.

   (c) V točki T poiščite tangetno ravnino Σ na omenjeno nivojsko ploskev skalarnega polja F (iz primera b).

   (d) Poiščite točko na dani krivulji $\vec{r}(t)$, v kateri je tangenta vzporedna z omenjeno tangetno ravnino Σ (iz primera c).

   Rešitev.

   (a) Iz teorije vemo, da je smer najhitrejšega spreminjanja ravno smer gradienta. Tako dobimo, da je iskani smerni odvod enak

   $$\operatorname{grad} F(T) \cdot \frac{\operatorname{grad} F(T)}{|\operatorname{grad} F(T)|} = |\operatorname{grad} F(T)|.$$

   Torej

   $$\operatorname{grad} F = (F_x, F_y, F_z) = \left(-\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} - y\sin(xy), \frac{e^{\frac{x}{y}}x}{y^2} - x\sin(xy), 2z \right)$$

   $$\operatorname{grad} F(T) = ... = (1,0,2) \quad \Rightarrow \quad |\operatorname{grad} F(T)| = \sqrt{5}$$

   (b) Ker velja $F(T) = 1$, dobimo $z^2 - e^{\frac{x}{y}} + \cos(xy) = 1$.

   (c) Normala iskane tangentne ravnine Σ je v točki T v resnici enaka $\operatorname{grad} F(T)$, torej $(1,0,2)$. Zato se iskana ravnina Σ glasi $x + 2z = d$, kjer d določimo z vstavljanjem točke T v nastavek za enačbo ravnine Σ; torej $x + 2z = 2$.

   (d) Dejstvo, da je premica vzporedna neki ravnini, pomeni, da je v resnici smerni vektor premice pravokoten na normalo ravnine. Torej

   $$\dot{\vec{r}}(t_0) \cdot (1,0,2) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}(t_0) + 2\dot{z}(t_0) = 0 \;\Rightarrow\; 2t\big(\cos(t_0^2) + 2 - 4t_0^2\big) = 0$$

   oziroma $t_0 = 0$, kar nam da točko $\vec{r}(0) = (0,0,0)$.

2. Izračunajte koordinate težišča telesa, določenega z

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \leq 2$$

in gostoto $\rho = 15(x + y)$.

Rešitev. Našo telo je očitno tisti del notranjosti stožca $z = r$, ki leži v prvem oktantu in je $z \leq 2$. Glede na to, da je tako telo kot tudi gostota simetrična glede na x in y, velja, da je $x_t = y_t$.

Najprej si pripravimo, kar potrebujemo:

$$\begin{aligned}
m &= \int_V \rho\, dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 15(r\cos\varphi + r\sin\varphi) r dz = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 15(2r^2 - r^3)(\cos\varphi + \sin\varphi) dr = \\
&= \ldots = 40 \\
m_x &= \int_V x\rho\, dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 15r\cos\varphi(r\cos\varphi + r\sin\varphi) r dz = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 15(2r^3 - r^4)(\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi) dr = \\
&= \ldots = 12 + 6\pi \\
m_y &= m_x \\
m_z &= \int_V z\rho\, dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 dr \int_r^2 15z(r\cos\varphi + r\sin\varphi) r dz = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 15\left(2r^2 - \frac{r^4}{2}\right)(\cos\varphi + \sin\varphi) dr = \\
&= \ldots = 64
\end{aligned}$$

Tako dobimo, da je težišče enako

$$\left(\frac{m_x}{m}, \frac{m_y}{m}, \frac{m_z}{m}\right) = \left(\frac{6 + 3\pi}{20}, \frac{6 + 3\pi}{20}, \frac{8}{5}\right).$$

3. Izračunajte krivuljni integral

$$\int_C (5y^2 - 3z)\, dx + \big(\sin z + \tan(xy)\big)\, dy + (-4z^3 + 8y^2)\, dz,$$

kjer je krivulja C daljica od točke $A(2, -2, -2)$ do točke $(3, -2, 0)$.
Z ustreznim kriterijem preverite še, ali je ta integral neodvisen od poti.

Rešitev. Daljico parametrizirajmo kot $\vec{r}(t) = \vec{r}_A + t(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, kjer $0 \leq t \leq 1$, torej

$$\begin{aligned} x &= 2 + t & &\longrightarrow & \dot{x} &= 1 \\ y &= -2 & &\longrightarrow & \dot{y} &= 0 \\ z &= -2 + 2t & &\longrightarrow & \dot{z} &= 2 \end{aligned}$$

Tako dobimo, da je integral enak

$$\begin{aligned} ... &= \int_0^1 \Big(\big(5(-2)^2 - 3(-2+2t)\big) + \big(-4(-2+2t)^3 + 8(-2)^2\big)2\Big)\,dt = \\ &= ... = \int_0^1 (-64t^3 + 192t^2 - 198t + 154)\,dt = \\ &= ... = \big(-16t^4 + 64t^3 - 99t^2 + 154t\big)\Big|_0^1 = \\ &= ... = 103 \end{aligned}$$

Ker rotor vektorskega polja $(5y^2 - 3z, \sin z + \tan(xy), -4z^3 + 8y^2)$ očitno ni enak $\vec{0}$, ta krivuljni integral NI neodvisen od poti.

4. Z ustreznim integralskim izrekom izračunajte

$$\iint_S (x^3 + z)\,dydz + (yz - 2x^2y)\,dzdx + (y^2z - x^2y)\,dxdy,$$

kjer je S zunanja stran površine telesa, določenega z

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \leq x^2 + y^2.$$

Rešitev. Ker imamo ploskovni integral 2. vrste po zaključeni ploskvi, bomo uporabili Gaussov izrek.

$$\operatorname{div}(x^3 + z, yz - 2x^2y, y^2z - x^2y) = 3x^2 + z - 2x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + z$$

Torej dobimo, da je naš integral enak

$$\begin{aligned} ... &= \iiint_V \big(x^2 + y^2 + z\big) dxdydz = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_0^{r^2} (r^2 + z) r\,dz = \\ &= ... = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z-1|=2} \frac{\tan z}{(z-i)^2}\, dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Funkcija $\tan z$ ima singularnosti tam, kjer ima $\cos z$ ničle; torej $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}$ in vse so prve stopnje. Zraven teh ima $\frac{\tan z}{(z-i)^2}$ še singularnost i, ki je pol druge stopnje. Znotraj naše krožnice $|z-1| = 2$ sta le $z_1 = \frac{\pi}{2}$ in $z_2 = i$. Zato si poračunajmo le residuume v teh dveh singularnostih

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z\to i} (\tan z)' = \lim_{z\to i} \frac{1}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 i} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 1} \\
\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\tan z}{(z-i)^2} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\sin z}{\cos z (z-i)^2} = \\
&= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin z + \left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cos z}{-\sin z (z-i)^2 + 2(z-i)\cos z} = \frac{1}{-\left(\frac{\pi}{2}-i\right)^2}
\end{aligned}$$

Končen rezultat je tako enak

$$2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=i} f(z) + \operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z)\right) = 2\pi i \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 1} - \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-i\right)^2}\right).$$