IZPIT IZ MATEMATIKE III

11. junij 2012

1. Poiščite točko na ploskvi

$$\vec{r}(u,v) = (u^2+v^2, u+v, u^2-v^2),$$

v kateri je tangetna ravnina vzporedna ravnini $2x-6y-z=3$.

Rešitev.

$$\begin{aligned}\vec{n}(u,v) &= \vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v) = (2u,1,2u)\times(2v,1,-2v)\\ &= (-2u-2v, 8uv, 2u-2v).\end{aligned}$$

Zaradi vzporednosti ravnin mora veljati vzporednost njunih normal:

$$(-2u-2v, 8uv, 2u-2v) = k(2,-6,-1).$$

S pomočjo vsote in razlike prve in tretje komponente dobimo $v=-\frac{k}{4}$ in $u=-\frac{3k}{4}$. Z vstavljanjem dobljenega v drugo komponento dobimo $k(k+4)=0$. Ker mora veljati $k\neq 0$, dobimo $k=-4$ in posledično $v=1$, $u=3$ oziroma iskano točko $\vec{r}(3,1)=(10,4,8)$.

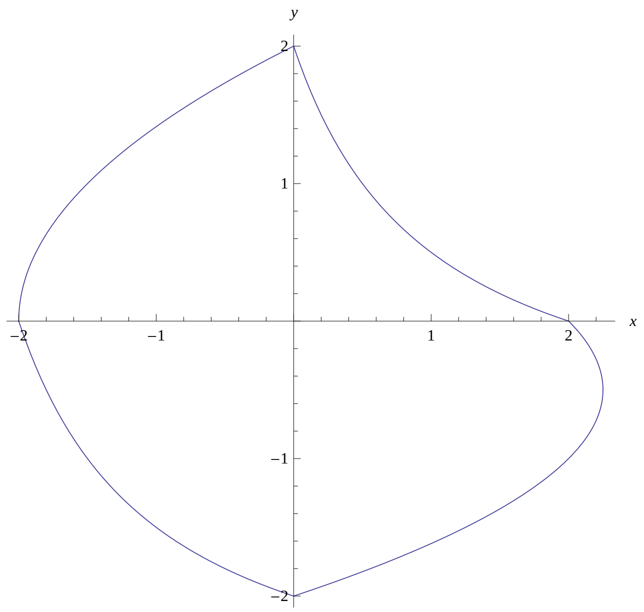
2. Zamenjajte vrstni red integriranja

$$\int_{-2}^{0}dx\int_{\frac{3}{x+3}-3}^{\sqrt{4+2x}}dy \;+\; \int_{0}^{2}dx\int_{\frac{-1-\sqrt{9-4x}}{2}}^{\frac{3}{x+1}-1}dy \;+\; \int_{2}^{\frac{9}{4}}dx\int_{\frac{-1-\sqrt{9-4x}}{2}}^{\frac{-1+\sqrt{9-4x}}{2}}dy.$$

Dobljen integral nato tudi izračunajte.

Rešitev.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{3}{x+3}-3 &&\longrightarrow && x=\frac{3}{y+3}-3\\
y &= \sqrt{4+2x} &&\longrightarrow && x=\frac{y^2}{2}-2\\
y &= \frac{-1\pm\sqrt{9-4x}}{2} &&\longrightarrow && x=-y^2-y+2\\
y &= \frac{3}{x+1}-1 &&\longrightarrow && x=\frac{3}{y+1}-1
\end{aligned}$$



Iz zgoraj poračunanega in slike dobimo, da se dan integral prevede do

$$
\begin{aligned}
\ldots &= \int_{-2}^{0} dy \int_{\frac{3}{y+3}-3}^{-y^2-y+2} dx \; + \; \int_{0}^{2} dy \int_{\frac{y^2}{2}-2}^{\frac{3}{y+1}-1} dx \\
&= \int_{-2}^{0} \left(-y^2 - y + 5 - \frac{3}{y+3}\right) dy + \int_{0}^{2} \left(\frac{3}{y+1} + 1 - \frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 5y - 3\log(y+3)\right)\Bigg|_{-2}^{0} + \left(3\log(y+1) + y - \frac{y^3}{6}\right)\Bigg|_{0}^{2} \\
&= -3\log 3 - \frac{8}{3} + 2 + 10 + 3\log 3 + 2 - \frac{8}{6} = 10
\end{aligned}
$$

3. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} (3z, 0, -2y) \cdot d\vec{r},$$

kjer je krivulja $\mathcal{C}$ enaka preseku med ploskvama

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad z = x^2 + y^2 - 5y$$

ter orientirana tako, da je njena projekcija na xy-ravnino pozitivno orientirana.

Rešitev. Krivuljo $\mathcal{C}$ parametriziramo kot

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(\varphi) &= (\cos\varphi, \sin\varphi, 1 - 5\sin\varphi)\,, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \\
\dot{\vec{r}}(\varphi) &= (-\sin\varphi, \cos\varphi, -5\cos\varphi)
\end{aligned}
$$

in dobimo

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int_0^{2\pi} \big(3(1-5\sin\varphi)(-\sin\varphi) - 2\sin\varphi(-5\cos\varphi)\big)\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} (-3\sin\varphi + 15\sin^2\varphi + 10\sin\varphi\cos\varphi)\,d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-3\sin\varphi + \frac{15}{2}\big(1-\cos(2\varphi)\big) + 5\sin(2\varphi)\right) d\varphi \\
&= \left(3\cos\varphi + \frac{15}{2}\,\varphi - \frac{15}{4}\,\sin(2\varphi) - \frac{5}{2}\,\cos(2\varphi)\right)\Bigg|_0^{2\pi} \\
&= \ldots = 15\pi
\end{aligned}$$

4. S pomočjo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja

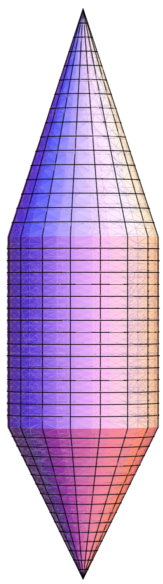
$$\vec{V} = \big(\sin(e^{yz}) + xz, e^{xy} - xy, z^2 - xze^{xy}\big)$$

skozi ploskev, ki je rob območja, določenega z neenačbami

$$z \geq 2\sqrt{x^2+y^2} - 7\,, \quad z \leq -3\sqrt{x^2+y^2} + 8\,, \quad x^2+y^2 \leq 4.$$

Rešitev. Upoštevajmo navodilo in si poračunajmo najprej

$$\operatorname{div}\vec{V} = z + xe^{xy} - x + 2z - xe^{xy} = 3z - x.$$



Stožca $z = 2r - 7$ in $z = -3r + 8$ se sekata pri $2r - 7 = -3r + 8$ oziroma $r = 3$, kar je zunaj valja $r = 2$, zato se iskani pretok izračuna kot

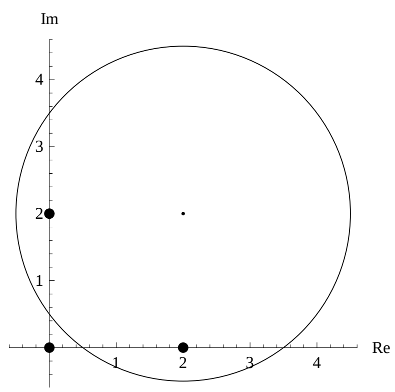
$$\begin{aligned}
\ldots &= \iiint_V (3z - x)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{2r-7}^{-3r+8} (3z - r\cos\varphi)\,r\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(\frac{15}{2}r^3 + 5r^3\cos\varphi - 30r^2 - 15r^2\cos\varphi + \frac{45}{2}r\right) dr \\
&= \int_0^{2\pi} (-5 - 20\cos\varphi)\,d\varphi = \ldots = -10\pi
\end{aligned}$$

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z-2-2i|=\frac{5}{2}} \frac{4}{z(z-2)(z-2i)^2},$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Glede na to, da je $|2+2i| = 2\sqrt{2} > \frac{5}{2}$ sta edini singularnosti znotraj območja $z = 2$ (pol 1. stopnje) in $z = 2i$ (pol 2. stopnje).



Zato

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=2} \frac{4}{z(z-2)(z-2i)^2} &= \lim_{z\to 2} \frac{4}{z(z-2i)^2} = \frac{2}{(2-2i)^2} = \frac{2}{-8i} = \frac{i}{4} \\
\operatorname{Res}_{z=2i} \frac{4}{z(z-2)(z-2i)^2} &= \lim_{z\to 2i} \left(\frac{4}{z(z-2)}\right)' = \lim_{z\to 2i} \frac{-4(2z-2)}{z^2(z-2)^2} \\
&= \frac{-8(2i-1)}{(2i)^2(2i-2)^2} = \frac{2i-1}{-4i} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{4} \\
\int_{|z-2-2i|=\frac{5}{2}} \frac{4}{z(z-2)(z-2i)^2} &= 2\pi i \left(\frac{i}{4} - \frac{1}{2} - \frac{i}{4}\right) = -\pi i
\end{aligned}$$