IZPIT IZ MATEMATIKE III

4. februar 2013

1. Izračunajte presečišče in kot, pod katerim krivulja

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t}{2},\ \frac{t}{2} - 1,\ \frac{t^2}{4} + t - 3\right)$$

seka ploskev $z = xy$.

Rešitev. Najprej poiščimo presečišče. Zato vstavimo parametrizacijo krivulje v enačbo ploskve:

$$\begin{aligned}
\frac{t^2}{4} + t - 3 &= \frac{t}{2}\left(\frac{t}{2} - 1\right) \\
t - 3 &= -\frac{t}{2} \\
\frac{3t}{2} &= 3 \\
t &= 2
\end{aligned}$$

S tem dobimo presečišče $\vec{r}_T = \vec{r}(2) = (1, 0, 0)$.

Za kot med krivuljo in ploskvijo si poračunajmo tangentni vektor na krivuljo in normalni vektor na ploskev v točki T.

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{t}{2} + 1\right) \\
\dot{\vec{r}}(2) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right) \\
\vec{n} &= (-z_x, -z_y, 1) = (-y, -x, 1) \\
\vec{n}_T &= (0, -1, 1) \\
\cos\varphi &= \frac{\dot{\vec{r}}(2) \cdot \vec{n}_T}{|\dot{\vec{r}}(2)|\,|\vec{n}_T|} \\
&= ... = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Kot med tangentnim vektorjem krivulje in normalo ravnine je tako $\frac{\pi}{3}$, kar pomeni, da je iskani kot enak $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

2. Izračunajte maso krivulje

$$\vec{r}(t) = \big(2(t\sin t + \cos t),\, 2(\sin t - t\cos t), 1\big), \quad t \in [0, 2\pi]$$

z dolžinsko gostoto $\rho = x^2 + y^2$.

Rešitev. Maso krivulje izračunamo s pomočjo krivuljnega integrala prve vrste $\int_C \rho\, ds$. Zato si pripravimo izračune:

$$\begin{aligned}
\rho &= 4(t\sin t + \cos t)^2 + 4(\sin t - t\cos t)^2 \\
&= ... = 4(t^2 + 1) \\
\dot{\vec{r}}(t) &= ... = (2t\cos t, 2t\sin t, 0) \\
ds &= ... = \sqrt{4t^2}dt = 2|t|dt = 2tdt,
\end{aligned}$$

kjer zadnji enačaj velja, ker je t na našem delu krivulje vedno nenegativen. Tako dobimo, da je iskana masa enaka

$$\begin{aligned}
\int_C \rho\, ds &= \int_0^{2\pi} 4(t^2+1)2t\, dt \\
&= ... = 32\pi^4 + 16\pi^2
\end{aligned}$$

3. Izračunajte ploščino območja, ki je omejeno s krivuljama

$$r = \cos\varphi \quad \text{in} \quad r = 1 + \cos\varphi.$$

Rešitev. Upoštevali bomo simetrijo območja glede na x-os in bomo zato integrirali samo po zgornji polravnini. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
S &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{1+\cos\varphi} r\, dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^{1+\cos\varphi} r\, dr\right) \\
&= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \cos\varphi\right) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{2}\right) d\varphi\right) \\
&= ... = 2\left(1 + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8} - 1\right) = \frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}$$

4. S pomočjo ustreznega integralskega izreka izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \big(x^2 - \cos(yz) + 1,\ y^2 - yx - yz,\ z^2 - yz + e^{xy}\big)$$

skozi zunanjo stran površine telesa, ki je določeno z

$$x^2 + y^2 \le 4, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad 0 \le z \le x^2 + y^2.$$

Rešitev. Glede na problem je potrebno uporabiti Gaussov izrek.

$$\operatorname{div} \vec{V} = 2x + 2y - x - z + 2z - y = x + y + z$$

Glede na območje uvedemo cilindrične kooordinate in dobimo

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{V}\, dxdydz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 dr \int_0^{r^2} (r\cos\varphi + r\sin\varphi + z) r\, dz \\
&= ... = \frac{64}{5} + \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}$$

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z+3|=5} \frac{27}{z(z+3i)^2(z-3)}\, dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Označimo $f(z) = \frac{27}{z(z+3i)^2(z-3)}$. Singularnosti $f(z)$ so $z = 0$, $z = -3i$ in $z = 3$, pri čemer so znotraj krivulje $|z+3| = 5$ le $z = 0$, ki je pol prve stopnje, in $z = -3i$, ki je pol druge stopnje.

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z \to 0} \frac{27}{(z+3i)^2(z-3)} = 1 \\
\operatorname{res}_{z=-3i} f(z) &= \lim_{z \to -3i} \left(\frac{27}{z(z-3)} \right)' = \lim_{z \to -3i} \frac{-27(2z-3)}{z^2(z-3)^2} \\
&= \ldots = -1 + \frac{i}{2} \\
\int_{|z+3|=5} \frac{27}{z(z+3i)^2(z-3)}\, dz &= 2\pi i \big(\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=3i} f(z) \big) \\
&= 2\pi i \left(1 - 1 + \frac{i}{2} \right) = -\pi.
\end{aligned}$$