Izpit Matematika III

22.1.2013

Rešitve

1. naloga

Izračunajte dolžino loka krivulje $\vec{r} = (\, t\cos t^2 \,,\, t\sin t^2 \,,\, t^2\,) \quad , \quad t > 0$
med presečiščema krivulje z valjema $x^2 + y^2 = 1$ in $x^2 + y^2 = 4$!

Rešitev:

Presečišči krivulje z valjema sta določeni s parametroma $t = 1$ in $t = 2$.

$\dot{\vec{r}} = (\, \cos t^2 - 2t^2 \sin t^2 \,,\, \sin t^2 + 2t^2 \cos t^2 \,,\, 2t\,)$

$$lok = \int\limits_1^2 \sqrt{(\cos^2 t^2 - 4t^2 \cos t^2 \sin t^2 + 4t^4 \sin^2 t^2) \; + \; (\sin^2 t^2 + 4t^2 \sin t^2 \cos t^2 + 4t^4 \cos^2 t^2) \; + \; 4t^2}\, dt \;=$$

$$\int\limits_1^2 \sqrt{1 + 4t^4 + 4t^2}\, dt \;=\; \int\limits_1^2 (1 + 2t^2)\, dt \;= t + 2\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^2 = \boxed{\frac{17}{3}}$$

2. naloga

Integracijsko območje v dvojnem integralu $\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ je množica

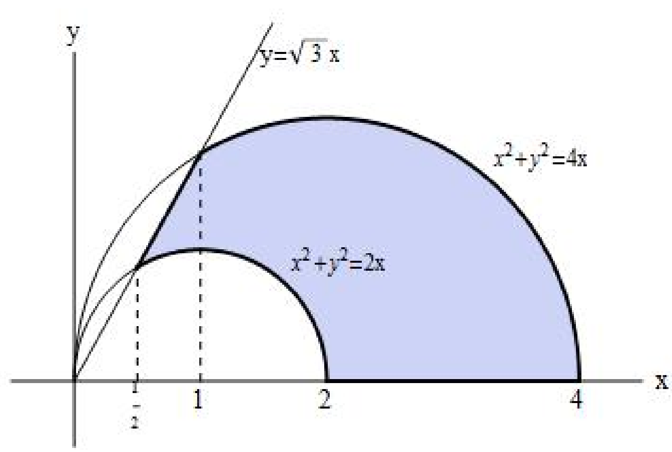
$D = \{\,(x,y)\,;\ 2x < x^2+y^2 < 4x \ \text{ in } \ 0 < y < x\sqrt{3}\,\}$.

1. Izrazite dvojni integral kot dvakratnega v kartezičnih koordinatah !
2. Izračunajte dvojni integral z vpeljavo polarnih koordinat !

Rešitev:

$$\begin{aligned} x^2+(\sqrt{3}x)^2 &= 2x \\ 4x^2 &= 2x \\ x_1 &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+(\sqrt{3}x)^2 &= 4x \\ 4x^2 &= 4x \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$



$$\iint_D y\,dxdy = \boxed{\int_{\frac{1}{2}}^{1} dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{3}x} y\,dy \ + \int_{1}^{2} dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} y\,dy \ + \int_{2}^{4} dx \int_{0}^{\sqrt{4x-x^2}} y\,dy}$$

$$\iint_D y\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi} r^2 \sin\varphi\,dr \ = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (4^3-2^3)\cos^3\varphi \sin\varphi\,d\varphi \ =$$

$$-\frac{56}{3}\cdot\frac{\cos^4\varphi}{4}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = -\tfrac{14}{3}\left(\tfrac{1}{16}-1\right) = \boxed{\frac{35}{8}}$$

3. naloga

Izračunajte $\displaystyle\int\limits_C zdx + xdy + 2ydz \quad , \quad$ kjer je krivulja C presek ploskve $z = 5 - (x^2 + y^2)$ z ravnino $y = 2x$ od točke $A(1,2,0)$ do točke $B(0,0,5)$!

Rešitev:

Parametrična enačba integracijske krivulje je
$\vec{r} = (\, t\, ,\, 2t\, ,\, 5 - 5t^2\,) \quad , \quad 1 > t > 0$

$$\int\limits_C zdx + xdy + 2ydz = \int\limits_1^0 \Big[(5 - 5t^2) + t2 + 4t(-10t)\Big]\, dt \;=\; \int\limits_1^0 (5 + 2t - 45t^2)\, dt \;=$$

$$5t + t^2 - 15t^3 \Big|_1^0 = -(5 + 1 - 15) = \boxed{9}$$

4. naloga

Izračunajte z uporabo residuumov $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2+x}{(x^2+4)^2}\,dx$!

Rešitev:

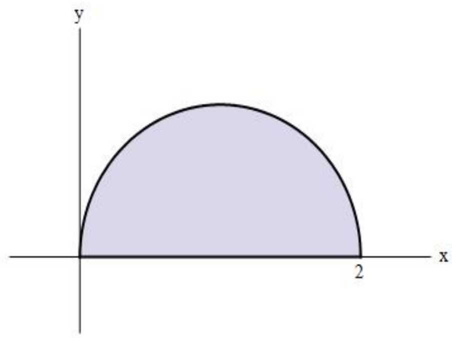
Funkcija $f(z) = \frac{2+z}{(z^2+4)^2}$ ima na zgornji polravnini pol 2. stopnje pri $z = 2i$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2+x}{(x^2+4)^2}\,dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \Big[\frac{(2+z)(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}\Big]' =$$

$$2\pi i \lim_{z\to 2i} \Big[\frac{2+z}{(z+2i)^2}\Big]' = 2\pi i \lim_{z\to 2i} \frac{(z+2i)^2-(2+z)2(z+2i)}{(z+2i)^4} = 2\pi i \frac{-16-(2+2i)8i}{16^2} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

5. naloga

S preslikavo $\quad w = \dfrac{z}{z-2} \quad$ poiščite sliko polkroga



Rešitev:

Pri preslikavi roba danega območja uporabimo lastnost, da *linearna ulomljena preslikava* ohranja krivulje iz družine *krožnice* $\cup$ *premice*. Rob slike bo ležal na krožnicah, ki potekajo skozi slike treh izbranih točk na posamezni mejni črti danega območja. Pri tem je krožnica skozi točko ∞ kar premica skozi ostali dve točki.

premer	
z	w
0	0
1	-1
2	∞

polkrožnica	
z	w
0	0
$1+i$	$-i$
2	∞