IZPIT IZ MATEMATIKE III

23. januar 2014

1. Vzemimo krivuljo $\vec{r}(t) = (1-t, 2-t, t^2)$ in skalarno polje $u = x^2 + y^2 + z$.

   (a) Izračunajte tisto nivojsko ploskev $\mathcal{S}$ skalarnega polja u, ki gre skozi točko $A(1, 2, -3)$.

   (b) Izračunajte skupno točko T omenjene nivojske ploskve $\mathcal{S}$ in krivulje $\vec{r}(t)$.

   (c) Izračunajte kot med omenjeno nivojsko ploskvijo $\mathcal{S}$ in krivuljo $\vec{r}(t)$ v skupni točki T.

   Rešitev.

   (a) Za $u = C$ mora veljati $1 + 4 - 3 = C$ oziroma $C = 2$. Iskana nivojska ploskev $\mathcal{S}$ se zato glasi $x^2 + y^2 + z = 2$.

   (b) Ko vstavimo parametrizacijo krivulje $x = 1-t$, $y = 2-t$, $z = t^2$ v $\mathcal{S}$, dobimo

   $$(1-t)^2 + (2-t)^2 + t^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad 3(t-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1.$$

   S tem dobimo iskano skupno točko $\vec{r}(1)$ oziroma $T(0, 1, 1)$.

   (c) Računajmo

   $$\begin{aligned}
   \dot{\vec{r}}(t) &= (-1, -1, 2t) && \Rightarrow && \dot{\vec{r}}(1) = (-1, -1, 2) \\
   \vec{n}(x, y, z) &= (2x, 2y, 1) && \Rightarrow && \vec{n}(T) = (0, 2, 1) \\
   \cos\alpha &= \frac{\dot{\vec{r}}(1) \cdot \vec{n}(T)}{|\dot{\vec{r}}(1)|\,|\vec{n}(T)|} = 0 && \Rightarrow && \alpha = \frac{\pi}{2} \\
   \varphi &= \frac{\pi}{2} - \alpha = 0.
   \end{aligned}$$

2. Izračunajte prostornino telesa, določenega z neenačbami:

   $$x^2 + y^2 \leq 2x, \quad z \leq x + 18, \quad z \geq 9\sqrt{x^2 + y^2}.$$

   Rešitev. Projekcija našega telesa na xy-ravnino je kar

   $$x^2 + y^2 \leq 2x \ \text{ oziroma } \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1,$$

   tj. krog s središčem v $(1, 0)$ in polmerom enakim 1. V polarnih koordinatah se to glasi $r^2 \leq 2r\cos\varphi$ oziroma $r \leq 2\cos\varphi$. Zato vplejimo v izračun prostornine cilindrične koordinate (kjer bomo upoštevali J=r). Tako dobimo

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_W \left(x + 18 - 9\sqrt{x^2+y^2}\right) dxdydz \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (r\cos\varphi + 18 - 9r) r\, dr \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^3\cos\varphi}{3} + 9r^2 - 3r^3\right)\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{8\cos^4\varphi}{3} + 36\cos^2\varphi - 24\cos^3\varphi\right) d\varphi \\
&= ... = 19\pi - 32.
\end{aligned}$$

3. Izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 - y^2) ds,$$

kjer je $\mathcal{C}$ tisti del preseka ploskev $x^2 + y^2 = 9$ in $x + y - z = 1$, kjer velja $0 \leq y \leq x$.

Rešitev. Glede na to, da je $\mathcal{C}$ presek valja in ravnine (ter je posledično projekcija na xy ravnino krožnica v središčni legi z radijem enakim 3), lahko parametriziramo recimo:

$$\begin{aligned}
x &= 3\cos t \\
y &= 3\sin t \\
z &= x + y - 1 = 3\cos t + 3\sin t - 1 \\
\vec{r}(t) &= (3\cos t, 3\sin t, 3\cos t + 3\sin t - 1) \\
\dot{\vec{r}}(t) &= (-3\sin t, 3\cos t, 3\cos t - 3\sin t) \\
ds &= ... = 3\sqrt{2 - \sin(2t)}\, dt
\end{aligned}$$

Omejitev $0 \leq y \leq x$ nam dodatno pove $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$. Tako dobimo (kjer tekom računanja uvedemo substitucijo $u = 2 - \sin(2t)$ in $du = -2\cos(2t)\, dt$):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} (x^2 - y^2) ds &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 27\cos(2t)\sqrt{2 - \sin(2t)}\, dt \\
&= \int_2^1 -\frac{27\sqrt{u}}{2}\, du = ... = 18\sqrt{2} - 9
\end{aligned}$$

4. S pomočjo Stokesove formule izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} \left(xz + e^x, 3xy - \sin y, xy - 2xz\right) \cdot d\vec{r},$$

kjer je $\mathcal{C}$ presek ravnine $x+y+z=1$ s plaščem piramide, določenim z oglišči $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ in $(0,0,2)$, orientiranim v negativni smeri gledano iz izhodišča.

Rešitev. Sledimo navodilu in uporabimo Stokesovo formulo. Najprej poračunajmo rotor vektorskega polja $\vec{V} = \big(xz + e^x, 3xy - \sin y, xy - 2xz\big)$:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = ... = (x, x-y+2z, 3y).$$

Krivulja $\mathcal{C}$ je po opisu sestavljena iz daljic med točkami $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ in $(0,0,1)$, ki vse ležijo na ravnini $x+y+z=1$, zato za ploskev $\mathcal{S}$ vzemimo kar trikotnik, ki ga omenjene 3 točke določajo s parametrizacijo

$$\begin{aligned}
\vec{r}(x,y) &= (x, y, 1-x-y)\\
\vec{r}_x(x,y) &= (1,0,-1)\\
\vec{r}_y(x,y) &= (0,1,-1)\\
(\operatorname{rot}\vec{V}, \vec{r}_x, \vec{r}_y) &= \begin{vmatrix} x & x-y+2z & 3y\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = ... = 2x+2y+2z
\end{aligned}$$

Parametra x, y tečeta po trikotniku v xy ravnini z oglišči $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Iz napisanega sledi

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \vec{V}\cdot d\vec{r} &= \iint_D (\operatorname{rot}\vec{V}, \vec{r}_x, \vec{r}_y)\, dxdy\\
&= \iint_D (2x+2y+2z)\, dxdy = 2\iint_D dxdy\\
&=^* 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = ... = 1
\end{aligned}$$

* lahko bi kar opazili, da je ploščina območja D enaka $\frac{1}{2}$.

5. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{e^z - 1 - i},$$

kjer je $\mathcal{C}$ pozitivno orientirana krivulja $\left|z - \log\sqrt{2}\right| = \pi$.

Rešitev. Najprej poiščimo singularnosti, za katere velja $\left|z - \log\sqrt{2}\right| < \pi$, torej rešimo enačbo $e^z - 1 - i = 0$:

$$\begin{aligned}
e^z &= 1+i\\
z_k &= \log(1+i) = \log|1+i| + i\left(\arctan\frac{1}{1} + 2k\pi\right), \quad k\in\mathbb{N}\\
&= \log\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k\in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

Edina, ki je znotraj $\left|z - \log\sqrt{2}\right| < \pi$, je očitno $z_0 = \log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}$. Poračunajmo si pripadajoči residuum:

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}} &= \lim_{z\to\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}} \frac{z - \left(\log\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)}{e^z - 1 - i} \\
&=^{*} \lim_{z\to\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{e^z} = \frac{1}{e^{\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}}} \\
&= e^{-\log\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-i)
\end{aligned}$$

* L'Hospitalovo pravilo

Sledi:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{e^z - 1 - i} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=\log\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}} = \pi i(1-i) = \pi(1+i)$$