IZPIT IZ MATEMATIKE III

20. junij 2014

1. Izračunajte vse tangentne ravnine na ploskev

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 4,$$

ki so vzporedne z ravnino $x + y - 2z = 1$.

Rešitev. Za točko na ploskvi, kjer se to zgodi, mora veljati $(2x, 2z, 4z) = k(1, 1, -2)$, oziroma $x = \frac{k}{2}$, $y = \frac{k}{2}$ in $z = -\frac{k}{2}$. Tako dobimo enačbo $\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4} + 2\frac{k^2}{4} = 4$, ki ima dve rešitvi $k = \pm 2$. S tem dobimo dve točki in posledično dve iskani tangentni ravnini

$T_1(1, 1, -1) \quad \longrightarrow \quad x + y - 2z = 4$

$T_2(-1, -1, 1) \quad \longrightarrow \quad x + y - 2z = -4$

2. Kolikšna je količina električnega naboja, ki je na ploskvi

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \text{kjer } 0 \leq z \leq 2,$$

če je površinska gostota naboja enaka $\rho = (x + y)^2$.

Rešitev. Količina električnega naboja q je enaka ploskovnemu integralu 1. vrste

$$q = \iint_S \rho \, dS.$$

Računajmo

$$\begin{aligned}
\vec{r}(u, v) &= (u \cos v, u \sin v, u) \\
\sqrt{EG - F^2} &= \sqrt{2u^2 - 0} = u\sqrt{2} \\
\rho &= u^2 + u^2 \sin(2v) \\
q &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^2 u^2 \big(1 + \sin(2v)\big) \sqrt{2} u \, du = ... = 8\pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

3. Poiščite pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \big(\cos(\pi x) + x^2,\, y^2 + 6xy - xz,\, 4xz - 2yz\big)$$

skozi zunanjo stran površine telesa, določenega z neenačbami

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad x + y + z \leq 1.$$

Rešitev. Uporabili bomo Gaussov izrek. Zato si poračunajmo divergenco vektorskega polja $\vec{V}$:

$$\operatorname{div} \vec{V} = -\pi \sin(\pi x) + 2x + 2y + 6x + 4x - 2y = 12x - \pi \sin(\pi x)$$

in uporabimo Gaussov izrek (ter tekom računanja ali per partes metodo ali uporabimo matematični priročnik)

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \big(12x - \pi \sin(\pi x)\big) dz = ... = \frac{2}{\pi^2}$$

4. Utemeljite, ali je kakšna od funkcij

$$u_1 = \arctan \frac{x}{y} + x^2 y^2, \quad u_2 = x + x^3 - 3xy^2$$

lahko realni del kake analitične funkcije.

Če je lahko, pripadajočo analitično funkcijo tudi poiščite.

Rešitev. Da je funkcija lahko realni dela kake analitične funkcije, mora biti harmonična. Ker

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} + 2y^2 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + 2x^2 = 2x^2 + 2y^2 \neq 0,$$

u_1 NE more biti realni del kake analitične funkcije. Ker

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0,$$

u_2 JE lahko realni del kake analitične funkcije. Poiščemo jo s pomočjo Cauchy-Riemannovega sistema enačb, ki mora veljati za realni in imaginarni del analitičnih funkcij (namesto u_2 pišimo v nadaljevanju kar u)

$$\begin{aligned}
v &= \int u_x \, dy = y + 3x^2 y - y^3 + C_1(x) \\
v &= \int -u_y \, dx = 3x^2 y + C_2(y) \\
v &= y + 3x^2 - y^3 + C \\
f(z) &= x + x^3 - 3xy^2 + i(y + 3x^2 y - y^3 + C) \\
&= (x + iy) + (x + iy)^3 + iC = z + z^3 + iC
\end{aligned}$$

5. Poiščite in skicirajte območje, v katerega kompleksna funkcija

$$f(z) = \frac{z - 2i}{z + 2i}$$

preslika prvi kvadrant.

Rešitev. Uporabili bomo dejstvo, da podana preslikava slika družino premic in krožnic v družino premic in krožnic.

Ker $f(0) = -1$, $f(2i) = 0$ in $f(\infty) = 1$, se pozitivni del imaginarne osi preslika v daljico od -1 do 1.

Ker $f(0) = -1$, $f(2) = ... = -i$ in $f(\infty) = 1$, se pozitivni del realne osi preslika v del krožnice, ki gre skozi točke -1, $-i$ in 0.

Skupaj z dejstvom, da dana preslikava ohranja orientiranost, vidimo, da je iskano območje spodnja polovica kroga s središčem v $z = 0$ in polmerom 1.