# IZPIT IZ MATEMATIKE III

4. september 2014

1. Izračunajte dolžino loka krivulje

$$\vec{r}(t) = \left(\log\frac{2+t}{2-t},\ 2\sqrt{2}\arcsin\frac{t}{2},\ t\right)$$

za $0 \le t \le 1$.

**Rešitev.**

$$\vec{r}(t) = \left(\log\frac{2+t}{2-t},\ 2\sqrt{2}\arcsin\frac{t}{2},\ t\right) = \left(\log(2+t)-\log(2-t), 2\sqrt{2}\arcsin\frac{t}{2}, t\right)$$

$$\dot{\vec{r}}(t) = \left(\frac{1}{2+t} - \frac{1}{2-t}\cdot(-1), \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}\cdot\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{4}{4-t^2}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4-t^2}}, 1\right)$$

$$ds = \sqrt{\frac{16}{\left(4-t^2\right)^2} + \frac{8}{4-t^2} + 1} = \sqrt{\frac{(8-t^2)^2}{(4-t^2)^2}}$$

$$s = \int_0^1 \frac{8-t^2}{4-t^2}dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{4}{4-t^2}\right)dt = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2-t} + \frac{1}{2+t}\right)dt =$$

$$= \big(t - \log|2-t| + \log|2+t|\big)\Big|_0^1 = 1 + \log 3$$

2. Zamenjajte vrstni red integracije

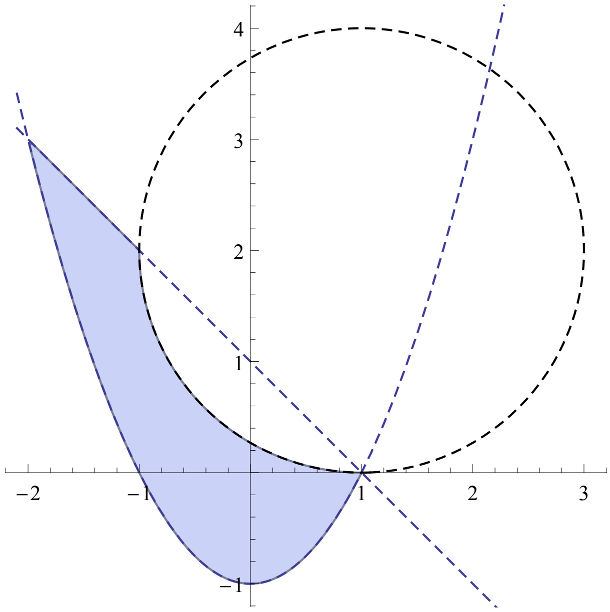
$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{1-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx + \int_2^3 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{1-y} f(x,y)dx$$

Integracijsko območje tudi skicirajte.

**Rešitev.** Poglejmo si mejne krivulje:

$$\begin{array}{llll}
x = \pm\sqrt{y+1} & \leftrightarrow & x^2 = y+1 & \leftrightarrow \quad y = x^2 - 1 \\
x = 1 - \sqrt{4y-y^2} & \leftrightarrow & (x-1)^2 = 4y - y^2 & \leftrightarrow \quad 4 = (x-1)^2 + (y-2)^2 \\
 & & & \leftrightarrow \quad y = 2 \pm \sqrt{3 + 2x - x^2} \\
x = 1 - y & \leftrightarrow & y = 1 - x &
\end{array}$$

Ob upoštevanju podanih mej tako za $x$ kot tudi za $y$ dobimo območje




in posledično zamenjan vrstni red integracije:

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{x^2-1}^{1-x} f(x,y)dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2-1}^{2-\sqrt{3+2x-x^2}} f(x,y)dy.$$

3. Imamo potenciometer, s katerim lahko spreminjamo gostoto naboja na dani ploskvi po funkciji

$$\rho(x) = \int_{x^2}^{x^2+1} e^{-t^2} dt.$$

Na kakšno vrednost $x$ naj nastavimo ta potenciometer, da se bo nabralo največ naboja?

**Rešitev.** Ker je ploskev dana (fiksna), se površina tekom tega dogajanja ne spreminja in zato je nabran naboj kar sorazmeren gostoti naboja. Posledično lahko iščemo kar maksimum gostote (uporabimo formulo za odvod integrala s parametrom).

$$\begin{aligned}\rho'(x) &= \int_{x^2}^{x^2+1} 0\,dt + e^{-(x^2+1)^2}2x - e^{-x^4}2x = \\ &= 2xe^{-x^4-2x^2-1}(1-e^{2x^2+1})\end{aligned}$$

Edini ekstrem torej nastopi pri $x = 0$ (saj ostali členi v produktu ne morejo biti enaki 0). Pokažimo še, da je to res maksimum.

$$\begin{aligned}&\rho''(x) = 2e^{-x^4-2x^2-1} + 2xe^{-x^4-2x^2-1}(-4x^3-4x) - 2e^{-x^4} - 2xe^{-x^4}(-4x^3)\\ &\rho''(0) = 2e^{-1} - 2 = 2(e^{-1}-1) < 0\end{aligned}$$

Torej je pri $x = 0$ res maksimum gostote naboje in zato tudi maksimum nabranega naboja.

Da je to res maksimum, bi lahko videli tudi tako, da bi si ogledali zgolj prvi odvod gostote naboja. Najprej opazimo, da za vse $x \in \mathbb{R}$ velja $e^{2x^2+1} > 1$ in posledično $1 - e^{2x^2+1} < 0$ ter zato za vse $x < 0$ vidimo, da je $\rho'(x) > 0$, kar pomeni, da tukaj $\rho(x)$ narašča, za vse $x > 0$ pa vidimo, da je $\rho'(x) < 0$, kar pomeni, da tukaj $\rho(x)$ pada. Oboje skupaj pa ravno pomeni, da je pri $x = 0$ maksimum.

4. Določite parameter $a$, da bo krivuljni integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{x}\,dx + \left((a+1)^2\,z\,e^{yz} - \frac{1}{y}\right)dy + (a^2-3)\,y\,e^{yz}\,dz$$

neodvisen od poti. Za dobljeni $a$ in primer, ko je $\mathcal{C}$ krivulja od točke $A(e,2,0)$ do točke $B(1,2,1)$, integral nato tudi izračunajte.

**Rešitev.** Dan krivuljni integral bo neodvisen od poti, ko bo vektorsko polje

$$\vec{V} = \left(\frac{1}{x}, (a+1)^2\,z\,e^{yz} - \frac{1}{y}, (a^2-3)\,y\,e^{yz}\right)$$

potencialno (tj. $\operatorname{rot}\vec{V} = 0$). Zatorej mora veljati

$$\Big(\big((a^2-3)-(a+1)^2\big)\big(e^{yz}+yze^{yz}\big),0,0\Big) = \Big(-2(a+2)\big(e^{yz}+yze^{yz}\big),0,0\Big) = (0,0,0)$$

oziroma $a = -2$.

V primeru potencialnih polj vemo, da je iskani odgovor zgolj razlika potencialov v posameznih točkah. Zato si poiščimo potencial in nato omenjeno razliko

$$\begin{aligned}
U &= \int \frac{1}{x}\,dx = \log x + C_1(y,z)\\
U &= \int \left(z\,e^{yz} - \frac{1}{y}\right)dy = e^{yz} - \log y + C_2(x,z)\\
U &= \int y\,e^{yz}\,dz = e^{yz} + C_3(x,y)\\
U &= e^{yz} + \log x - \log y + C = e^{yz} + \log\frac{x}{y} + C\\
U(B) - U(A) &= e^2 + \log\frac{1}{2} - 1 - \log\frac{e}{2} = e^2 - \log 2 - 1 - 1 + \log 2 = e^2 - 2
\end{aligned}$$

5. (a) Rešite enačbo

$$\cos z = \frac{5i}{12}.$$

(b) Izračunajte integral

$$\int_{|z-\frac{\pi}{2}+i|=1} \frac{dz}{\cos z - \frac{5i}{12}},$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

**Rešitev.**

(a) Če uporabimo zvezo $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, se nam enačba prevede do $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{5i}{12}$, po substituciji $u = e^{iz}$ pa do kvadratne enačbe $u^2 - \frac{5i}{6}u + 1 = 0$, ki ima rešitvi

$$u_{1,2} = \frac{\frac{5i}{6} \pm \sqrt{\frac{-25}{36} - 4}}{2} = \frac{5i}{12} \pm \frac{13i}{12}.$$

Če vstavimo sedaj nazaj našo substitucijo in dobljeno enačbo kompleksno logaritmiramo, dobimo dve družini rešitev

$$iz_{1,2} = \log\left(\frac{5i}{12} \pm \frac{13i}{12}\right)$$

$$iz_{1,2} = \begin{cases} \log\left|\frac{3i}{2}\right| + i\big(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big) \\ \log\left|-\frac{2i}{3}\right| + i\big(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\big) \end{cases}$$

$$z_{1,2} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log\frac{3}{2} \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log\frac{2}{3} \end{cases}$$

(b) Singularnosti naše funkcije so ravno rešitve enačbe iz točke $(a)$ in edina singularnost, ki je znotraj danega območja, je tako le $z = \frac{\pi}{2} - i\log\frac{3}{2}$, ki je očitno pol prve stopnje. Zato si poračunajmo residuum v tej točki (kjer pri prvem enačaju uporabimo L'Hospitalovo pravilo):

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\frac{\pi}{2}-i\log\frac{3}{2}} \frac{z - \left(\frac{\pi}{2} - i\log\frac{3}{2}\right)}{\cos z - \frac{5i}{12}} &= \lim_{z\to\frac{\pi}{2}-i\log\frac{3}{2}} \frac{1}{-\sin z} = -\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\log\frac{3}{2}\right)} \\
&= -\frac{2i}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}-i\log\frac{3}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{2}-i\log\frac{3}{2}\right)}} \\
&= -\frac{2i}{\frac{3}{2}(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) - \frac{2}{3}(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})} \\
&= -\frac{2i}{\frac{3i}{2} + \frac{2i}{3}} = -\frac{2i}{\frac{13i}{6}} = -\frac{12}{13}
\end{aligned}$$

Naša iskana vrednost integrala je tako enaka $2\pi i\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{24\pi i}{13}$.