Izpit Matematika III

6.2.2014

1. Vse točke krivulje
$$\vec{r}(t) = \left(t^2 + 2\,,\, t^2 + 2t\,,\, 2t - 1 \right)$$
ležijo v isti ravnini. Poiščite enačbo te ravnine .

2. Izračunajte $F'(1)$ za funkcijo
$$F(y) = \int_0^y \frac{\ln(1 + xy)}{x}\, dx \quad .$$

3. Žica ima obliko polkrožnice
$$x^2 + y^2 + z^2 = 4\,,\ x + y = 2\,,\ z > 0 \quad .$$
Izračunajte maso žice, če je gostota mase na dolžinsko enoto enaka $\sqrt{y}$.

4. Izračunajte površino ploskve
$$x^2 + y^2 = x\,,\ 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2} \quad .$$

5. (a) Izračunajte kompleksni števili

   $z_1 = \sin(i \ln 2)$
   $z_2 = i \sin(\frac{\pi}{2} + i \ln 2)$.

   (b) Izračunajte kompleksni integral v pozitivni smeri
$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)}$$
   kjer sta z_1 in z_2 konstanti iz točke a).

Rešitve

1. naloga

Izraz

$ax+by+cz = a(t^2+2)+b(t^2+2t)+c(2t-1) = (a+b)t^2+2(b+c)t+(2a-c)$

naj bo nedvisen od t. Zato mora biti

$a+b=0\ ,\ b+c=0 \quad \rightarrow \quad a=-b\ ,\ c=-b$

$ax+by+cz = -bx+by-bz = (2a-c) = -2b+b \quad / : -b$

$$\boxed{x-y+z=1}$$

Druga rešitev :

$\dot{\vec{r}}(t) = \Big(2t\ ,\ 2t+2\ ,\ 2\Big)$

$\vec{n} = \dot{\vec{r}}(1) \times \dot{\vec{r}}(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (4,-4,4)$

$\Big(\vec{r}-\vec{r}(0)\Big) \cdot \frac{1}{4}\vec{n} = 0$

$\Big((x,y,z)-(2,0,-1)\Big) \cdot (1,-1,1) = 0$

$$\boxed{x-y+z-1=0}$$

2. naloga

$$F'(y) = \int_0^y \frac{dx}{1+xy} + \frac{\ln(1+y^2)}{y} = \frac{1}{y}\ln(1+xy)\Big|_0^y + \frac{\ln(1+y^2)}{y} =$$

$$\frac{2}{y}\ln(1+y^2)$$

$$F'(1) = 2\ln 2 = \boxed{\ln 4}$$

3. naloga

Parametrizacija krivulje :

$x = t\ ,\ y = 2-t\ ,\ z^2 = 4 - t^2 - (2-t)^2 = 4t - 2t^2$

$\vec{r}(t) = \Big(t\ ,\ 2-t\ ,\ \sqrt{4t-2t^2}\Big)$

$\dot{\vec{r}}(t) = \Big(1\ ,\ 1\ ,\ \dfrac{4-4t}{2\sqrt{4t-2t^2}}\Big)$

$|\,\dot{\vec{r}}\,|^2 = 1 + 1 + \dfrac{(2-2t)^2}{4t-2t^2} = \dfrac{8t-4t^2+4-8t+4t^2}{4t-2t^2} = \dfrac{4}{2t(2-t)}$

$$m = \int_C \sqrt{y}\, ds = \int_0^2 \sqrt{2-t}\sqrt{\frac{4}{2t(2-t)}}\, dt =$$

$$\sqrt{2}\int_0^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{2}2\sqrt{t}\Big|_0^2 = \boxed{4}$$

4. naloga

Računa se površina na ploskvi $x^2+y^2=x$, ki je plašč valja. Parametrizacijo ploskve dobimo tako, da vstavimo cilindrične koordinate v enačbo plašča valja; znebimo se koordinate ρ, ostaneta φ in z. ki bosta parametra. Plašč valja je zgoraj odrezan s stožcem $z=\sqrt{x^2+y^2}$. Zato neenačba $z<\sqrt{x^2+y^2}$ določa zgornjo mejo za parameter z v integraciji.

$$(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho\cos\varphi \quad\rightarrow\quad \rho=\cos\varphi$$

Enačba ploskve : $\vec{r}(\varphi,z)=\Big(\cos^2\varphi\ ,\ \cos\varphi\sin\varphi\ ,\ z\Big)$

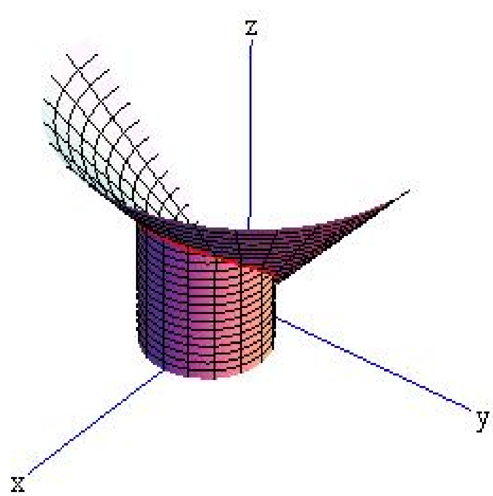
Zgornja meja za z : $z<\sqrt{x^2+y^2}=\rho=\cos\varphi$

$$\vec{r}_\varphi=\Big(2\cos\varphi\sin\varphi\ ,\ -\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\ ,\ 0\Big)$$
$$\vec{r}_z=(0,0,1)$$

$$E=\vec{r}_\varphi\cdot\vec{r}_\varphi=\sin^2 2\varphi+\cos^2 2\varphi=1$$
$$G=\vec{r}_z\cdot\vec{r}_z=1$$
$$F=\vec{r}_\varphi\cdot\vec{r}_z=0$$

$$P=\iint dS=\iint\sqrt{EG-F^2}\,d\varphi dz=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\cos\varphi}dz\ =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\ =\sin\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\boxed{2}$$



5. naloga

a)

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$z_1 = \frac{e^{-\ln 2} - e^{\ln 2}}{2i} = \frac{\frac{1}{2} - 2}{2i} = \boxed{\frac{3}{4}\, i}$$

$$z_2 = i\,\frac{e^{i\frac{\pi}{2} - \ln 2} - e^{-i\frac{\pi}{2} + \ln 2}}{2i} = \frac{\frac{1}{2}i + 2i}{2} = \boxed{\frac{5}{4}\, i}$$

b)

Znotraj integracijske krivulje je z_1 , ki je pol 1. stopnje.

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi i \lim_{z \to z_1} \frac{1}{(z - z_2)} =$$

$$\frac{2\pi i}{(z_1 - z_2)} = \frac{2\pi i}{-\frac{2}{4} i} = \boxed{-4\pi}$$