PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

26. 11. 1996

1. Dana je ploskev

$$\vec{r}(u,v) = (\frac{1}{\sqrt{u}}\sin v, \frac{1}{\sqrt{u}}\cos v, \sqrt{u})$$

in skalarno polje

$$F(x,y,z) = z + \frac{2}{\sqrt{z}} - \ln(\frac{x}{y}) - 3 - \ln\sqrt{3}.$$

a) Določi tisto koordinatno krivuljo ploskve $\vec{r}(u,v)$, ki gre skozi točki $T_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$ in $T_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \sqrt{2})$. Izračunaj točko, v kateri je tangenta na to krivuljo vzporedna normali ploskve $F(x,y,z) = 0$ v točki $T_3(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2, 1)$.
b) Izračunaj smerni odvod skalarnega polja $F(x,y,z)$ v točki $T_3(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2, 1)$ v smeri vektorja $\vec{l} = (1,1,0)$.
Rešitev. V točki $T_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2})$ sta vrednosti parametrov $u = 2$ in $v = \frac{\pi}{4}$, v točki $T_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \sqrt{2})$ pa sta vrednosti parametrov $u = 2$ in $v = \frac{\pi}{2}$. Torej je konstanten parameter u in je zato koordinatna krivulja, ki gre skozi točki T_1 in T_2, enaka

$$\vec{r}(v) = (\frac{1}{\sqrt{2}}\sin v, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos v, \sqrt{2}).$$

Smerni vektor tangente te krivulje pa je

$$\vec{r}\,' = (\frac{1}{\sqrt{2}}\cos v, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin v, 0).$$

Normala na ploskev $F(x,y,z) = 0$ je

$$\mathrm{grad}F = (-\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, 1 - \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}),$$

torej je v točki T_3 enaka $\vec{n} = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Potem je za $v = \frac{\pi}{6}$

$$\vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{r}'(\frac{\pi}{6}).$$

Iskana točka je $\vec{r}(2, \frac{\pi}{6})$, torej $T(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \sqrt{2})$.
b)

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{l}}(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2, 1) = \mathrm{grad} F(\frac{2}{\sqrt{3}}, 2, 1) \cdot (1,1,0)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

2. Izračunaj integral s parametrom

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos(kx)}{x}\, e^{-2x}\, dx$$

za vrednost parametra $k = 1$.

Rešitev.

$$F(k) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(kx)}{x}\, e^{-2x}\, dx,$$

torej je

$$F'(k) = \int_0^\infty \frac{1}{x}\, \sin(kx)\, xe^{-2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{4+k^2}\, e^{-2x}(-2\sin(kx) - k\cos(kx))\, |_0^\infty = \frac{1}{4+k^2}\, k.$$

Sledi, da je

$$F(k) = \frac{1}{2}\ln(4+k^2) + C.$$

Ker pa je $F(0) = 0$ oziroma $F(0) = \frac{1}{2}\ln(4) + C$, je $C = -\ln 2$, torej

$$F(k) = \frac{1}{2}\ln(4+k^2) - \ln 2$$

in tako

$$F(1) = \ln\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

3. Telo je omejeno navzdol s ploskvijo $3x^2 + 3(y-2)^2 - 4z = 0$ in navzgor s ploskvijo $x^2 + (y-2)^2 - 4z + 8 = 0$. Izračunaj prostornino in maso telesa, če veš, da je njegova gostota $\sigma(z) = \frac{1}{z+1}$ odvisna samo od višine.

Rešitev. Vpeljemo premaknjene valjne koordinate $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi + 2$, $z = z$, za katere je $\mathcal{J} = r$. Potem pa je

$$\frac{3}{4}r^2 \leq z \leq \frac{1}{4}r^2 + 2.$$

Prostornina je

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 dr \int_{\frac{3}{4}r^2}^{\frac{1}{4}r^2+2} r dz = 4\pi.$$

Masa pa je

$$m = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^2 dr \int_{\frac{3}{4}r^2}^{\frac{1}{4}r^2+2} r\frac{1}{z+1} dz = 4\pi(\frac{8\ln 4}{3} - 3\ln 3).$$