DRUGI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

17. januar 1997

1. Izračunaj krivuljni integral

$$\oint_C (-3y, -xz, yz^2)d\vec{r},$$

pri čemer je krivulja C presek valja $x^2 + y^2 = a^2$ in ravnine $3y - 4z = -8$.

2. Reši enačbo

$$2\,\mathrm{sh}z = e^z - \mathrm{i}\,e.$$

3. a) Zapiši Laurentovo vrsto funkcije

$$f(z) = \frac{1}{(z - 5\,\mathrm{i})^3(z + \mathrm{i})}$$

v okolici točke $5\,\mathrm{i}$ in določi območje konvergence.

b) Izračunaj

$$\oint_C \frac{dz}{(z - 5\,\mathrm{i})^3(z + \mathrm{i})}, \qquad C : |z - 2\,\mathrm{i}| = 4.$$

Integriraj v pozitivni smeri.

REŠITVE

1. Izračunaj krivuljni integral

$$\oint_C (-3y, -xz, yz^2) d\vec{r},$$

pri čemer je krivulja C presek valja $x^2 + y^2 = a^2$ in ravnine $3y - 4z = -8$.

Rešitev.
$\text{rot}(-3y, -xz, yz^2) = (z^2 + x, 0, -z + 3)$.
Parametriziramo ploskev S, ki jo omejuje krivulja C:
$x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = \frac{3}{4}y + 2 = \frac{3}{4}r\sin\phi + 2$,
torej
$\vec{r} = (r\cos\phi, r\sin\phi, \frac{3}{4}r\sin\phi + 2)$, $0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq r \leq a$.
Sledi, da je
$\vec{r}_r = (\cos\phi, \sin\phi, \frac{3}{4}\sin\phi)$, $\vec{r}_\phi = (-r\sin\phi, r\cos\phi, \frac{3}{4}r\cos\phi)$,
zato je
$E = 1 + \frac{9}{16}\sin^2\phi$, $F = \frac{9}{16}r\sin\phi\cos\phi$, $G = r^2 + \frac{9}{16}r^2\cos^2\phi$ in
$EG - F^2 = \frac{25}{16}r^2$.
Upoštevamo, da ima ploskev S normalo $\frac{1}{5}(0, 3, -4)$, uporabimo Stokesov izrek in dobimo

$$\begin{aligned}
\oint_C (-3y, -xz, yz^2) d\vec{r} &= \frac{1}{5}\int\int_S (4z - 12) dS \\
&= \frac{4}{5}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a (\frac{3}{4}r\sin\phi + 2 - 3)\frac{5}{4} r dr \\
&= -\pi a^2.
\end{aligned}$$

2. Reši enačbo

$$2\,\text{sh} z = e^z - \mathrm{i}\, e.$$

Rešitev.
Ker je $e^z - e^{-z} = e^z - \mathrm{i}\, e$, je $e^{-x}e^{-\mathrm{i}y} = \mathrm{i}\, e$, torej je
$e^{-x}\cos y = 0$ in $-e^{-x}\sin y = e$.
Iz prve enačbe sledi, da mora biti $y = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, torej je $\sin y$ enak 1 ali -1, vendar pa iz druge enačbe sledi, da je $\sin y < 0$, zato je $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ in $e^{-x} = e$, torej $x = -1$.

3. a) Zapiši Laurentovo vrsto funkcije

$$f(z) = \frac{1}{(z-5\,\mathrm{i})^3(z+\mathrm{i})}$$

v okolici točke $5\,\mathrm{i}$ in določi območje konvergence.
b) Izračunaj

$$\oint_C \frac{dz}{(z-5\,\mathrm{i})^3(z+\mathrm{i})}, \qquad C : |z-2\,\mathrm{i}| = 4.$$

Integriraj v pozitivni smeri.

Rešitev.
a)Zapišemo $w = z - 5\mathrm{i}$ in dobimo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-5\,\mathrm{i})^3(z+\mathrm{i})} = \frac{1}{w^3}\cdot\frac{1}{w+6\mathrm{i}} = \frac{1}{w^3}\cdot\frac{1}{6\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{w}{6\mathrm{i}})} \\ &= -\frac{\mathrm{i}}{6}\frac{1}{w^3}\sum_{k=0}^{\infty}(-\frac{w}{6\mathrm{i}})^k = -\frac{\mathrm{i}}{6}\frac{1}{(z-5\mathrm{i})^3}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{\mathrm{i}}{6})^k(z-5\mathrm{i})^k \\ &= -\sum_{k=-3}^{\infty}(\frac{\mathrm{i}}{6})^{k+4}(z-5\mathrm{i})^k. \end{aligned}$$

Vrsta konvergira do prve singularne točke, torej na območju

$$0 < |z-5\mathrm{i}| < 6.$$

b) $\mathrm{res}_{z=5\mathrm{i}} f(z) = -(\frac{\mathrm{i}}{6})^{-1+4} = \frac{\mathrm{i}}{216}.$

$\mathrm{res}_{z=-\mathrm{i}} f(z) = \lim_{z\to-\mathrm{i}} f(z)(z+\mathrm{i}) = \frac{1}{(-6\mathrm{i})^3} = -\frac{\mathrm{i}}{216}.$
Torej je

$$\oint_C \frac{dz}{(z-5\,\mathrm{i})^3(z+\mathrm{i})} = 0.$$