PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

26. november 2002

1. [35] S pomočjo odvajanja na parameter izračunaj integral

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x} \cos(ex)\, dx,\ a \geq 0$$

in nato uporabi ta rezultat za izračun integrala

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ex}}{x} \cos(ex)\, dx.$$

Rešitev

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x} \cos(ex)\, dx$$

torej je

$$\begin{aligned} F'(a) &= \int_0^\infty e^{-ax} \cos(ex)\, dx = \\ &= \frac{e^{-ax}}{a^2+e^2} \big(-a\cos(ex) + e\sin(ex)\big)\Big|_0^\infty = \\ &= \frac{a}{a^2+e^2} \end{aligned}$$

Po uvedbi substitucije $u = a^2 + e^2$ in integriranju dobimo

$$F(a) = \frac{1}{2} \ln(a^2+e^2) + C.$$

Z upoštevanjem $F(0) = 0$ dobimo $C = -1$ in zato

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{x} \cos(ex)\, dx = \frac{1}{2}\ln(a^2+e^2) - 1.$$

Za izračun drugega integrala je treba postaviti $a = e$ in tako dobimo

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-ex}}{x} \cos(ex)\, dx = \frac{1}{2}\ln(e^2+e^2) - 1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

2. [30] Izračunaj prostornino telesa omejenega s paraboloidoma $z = x^2 + y^2$ in $z = x^2 + 2y^2$ ter valjem $x^2 + y^2 = 1$.

Rešitev

Projekcija telesa na xy ravnino je krožnica $x^2 + y^2 = 1$, zato vzemimo cilindrične koordinate: $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = z$, za katere tudi vemo, da dobimo Jacobijevo determinanto enako r.
Ob upoštevanju $z = x^2 + y^2 = r^2$ in $z = x^2 + 2y^2 = r^2 + r^2\sin^2\phi$ dobimo

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 dr \int_{r^2}^{r^2+r^2\sin^2\phi} r\,dz = \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 r^3 \sin^2\phi\,dr = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2\phi\,d\phi = \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{4}\sin(2\phi)\right)\Big|_0^{2\pi} = \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

3. [35] Vzemimo skalarno polje

$$F(x,y,z) = e^{\frac{x}{z}} + e^y x^2$$

in krivuljo

$$\vec{r} = \left(2\cos\phi, \sqrt{2}\sin\phi, 5 - \cos(2\phi)\right).$$

a) Poišči enačbo nivojske ploskve skalarnega polja F, ki gre skozi točko $T_1(0,2,1)$.
b) Poišči točko na dani krivulji s pozitivno x komponento, v kateri je tangenta na to krivuljo pravokotna na normalo dane nivojske ploskve v točki $T_1(0,2,1)$.
c) Izračunaj smerni odvod skalarnega polja F v točki $T_2(1,1,1)$ v smeri najhitrejšega spreminjanja.

Rešitev

a) $F(0,2,1) = 1$, torej se nivojska ploskev v implicitni obliki glasi

$$e^{\frac{x}{z}} + e^y x^2 = 1$$

b) Smer tangente na krivuljo je enaka

$$\vec{s} = \vec{r}\,' = \left(-2\sin\phi, \sqrt{2}\cos\phi, 2\sin(2\phi)\right).$$

Normala dane nivojske ploskve je enaka

$$\vec{n} = \left(2e^y x + \frac{e^{\frac{x}{z}}}{z}, e^y x^2, \frac{-e^{\frac{x}{z}} x}{z^2}\right).$$

$$\vec{n_{T_1}} = \vec{n}(0,2,1) = (1,0,0).$$

Ker mora biti tangenta na krivuljo pravokotna na normalo nivojske ploskve, mora biti $\vec{n_{T_1}}.\vec{s} = 0$, kar nam da, da mora biti $-2\sin\phi = 0$. Ker iščemo rešitev s pozitivno x komponento, mora biti $\phi = 0$, kar nam da točko $T(2,0,4)$.

c)

$$gradF = \left(2e^y x + \frac{e^{\frac{x}{z}}}{z}, e^y x^2, \frac{-e^{\frac{x}{z}} x}{z^2}\right).$$

$$gradF(T_2) = (3e, e, -e).$$

Vemo, da je smer najhitrejšega spreminjanja skalarnega polja ravno gradient tega polja. Tako za naš smerni odvod dobimo

$$gradF(T_2).\frac{gradF(T_2)}{|gradF(T_2)|} = |gradF(T_2)| = \sqrt{11}e.$$