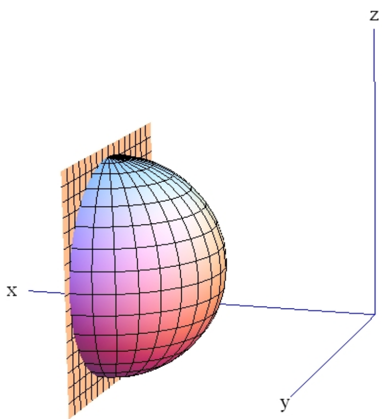
2. Kolokvij Matematika III
17. januar 2003
Rešitve

1. naloga



$$\iint_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \iiint_{telo} \operatorname{div}\vec{r}\,dV = 3\iiint_{telo} dV = 3\cdot\text{volumen polkrogle } = \boxed{4\pi R^3}$$

2. naloga

a)

V enačbi $\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{3}{4}i$ vpeljemo neznanko $e^{iz} = t$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{3}{2}i$$

$$2t^2 - 3it + 2 = 0$$

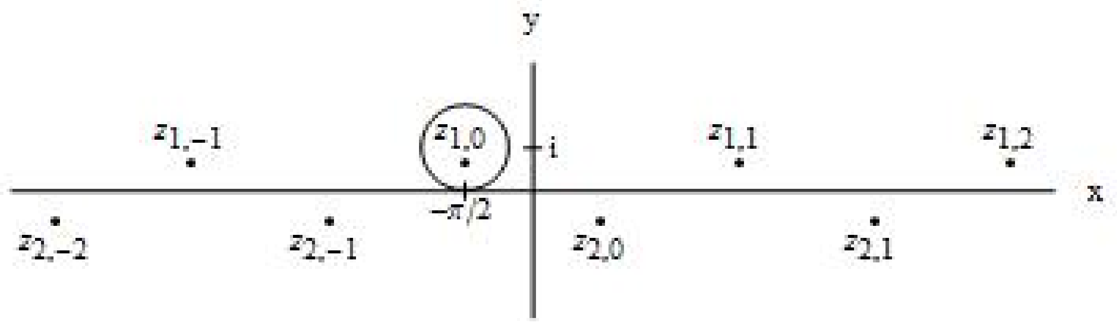
$$t_{1,2} = \frac{3i \pm \sqrt{-9-16}}{4} = \frac{3i \pm 5i}{4}$$

$$t_1 = -\frac{i}{2} \quad , \quad z_{1,k} = \frac{1}{i}\ln t_1 = \frac{1}{i}\Big(\ln\frac{1}{2} + i(-\frac{\pi}{2} + k2\pi)\Big)$$

$$t_2 = 2i \quad , \quad z_{2,k} = \frac{1}{i}\ln t_2 = \frac{1}{i}\Big(\ln 2 + i(\frac{\pi}{2} + k2\pi)\Big)$$

$$\boxed{z_{1,k} = \Big(-\frac{\pi}{2} + k2\pi\Big) + i\ln 2 \quad , \quad z_{2,k} = \Big(\frac{\pi}{2} + k2\pi\Big) - i\ln 2 \quad , \quad k \in Z}$$

b)



Vse singularne točke so poli prvih stopenj. Znotraj integracijske krivulje leži samo $z_{1,0}$.

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_{1,0}} \frac{1}{\cos z - \frac{3}{4}i} = 2\pi i \lim_{z\to z_{1,0}} \frac{z - z_{1,0}}{\cos z - \frac{3}{4}i} = 2\pi i \lim_{z\to z_{1,0}} \frac{1}{-\sin z} = \frac{2\pi i}{-sin\, z_{1,0}} = \frac{2\pi i}{5/4} = \boxed{\frac{8\pi}{5}i}$$

$$sin(-\frac{\pi}{2} + i\ln 2) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y = \sin(-\frac{\pi}{2}) \operatorname{ch} \ln 2 + i\cos(-\frac{\pi}{2}) \operatorname{sh} \ln 2 = -\frac{2+\frac{1}{2}}{2} = -\frac{5}{4}$$

3. naloga

a)

Funkcija je konformna povsod tam, kjer je definirana in je $f'(z) \neq 0$.

Ni definirana pri $z = \frac{1}{2}\ln(-1) = \frac{1}{2}(\ln 1 + i(\pi + 2n\pi)) = i(\frac{\pi}{2} + n\pi)$

$$f'(z) = \frac{e^{2z}2(e^{2z}+1) - (e^{2z}-1)e^{2z}2}{(e^{2z}+1)^2} = \frac{4e^{2z}}{(e^{2z}+1)^2} \neq 0$$

$f(z)$ je konformna v vseh točkah, $\boxed{\text{razen } i(\frac{\pi}{2} + n\pi)\ ,\ n \in Z}$

b)

Preslikava je kompozitum dveh preslikav: Najprej preslikamo dano območje iz ravnine $z = x+iy$ v ravnino $w = u+iv$ s preslikavo $w = e^{2z}$. Potem dobljeno sliko iz ravnine w preslikamo v ravnino f s preslikavo $f = \frac{w-1}{w+1}$. Obakrat najprej poiščemo slike mejnih krivulj A, B in C. Slika območja pa je tisti del, ki ima prave kote v vogalih območja. Pri preslikavi $w \to f$ uporabimo lastnost, da *linearna lomljena preslikava* ohranja premice/kroge.

Preslikava $w = e^{2z}$:

A : $\quad z = x + i\dfrac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad w = e^{2x+i\frac{\pi}{2}} = u + iv \quad \to \quad u = 0\,,\ v = e^{2x}$

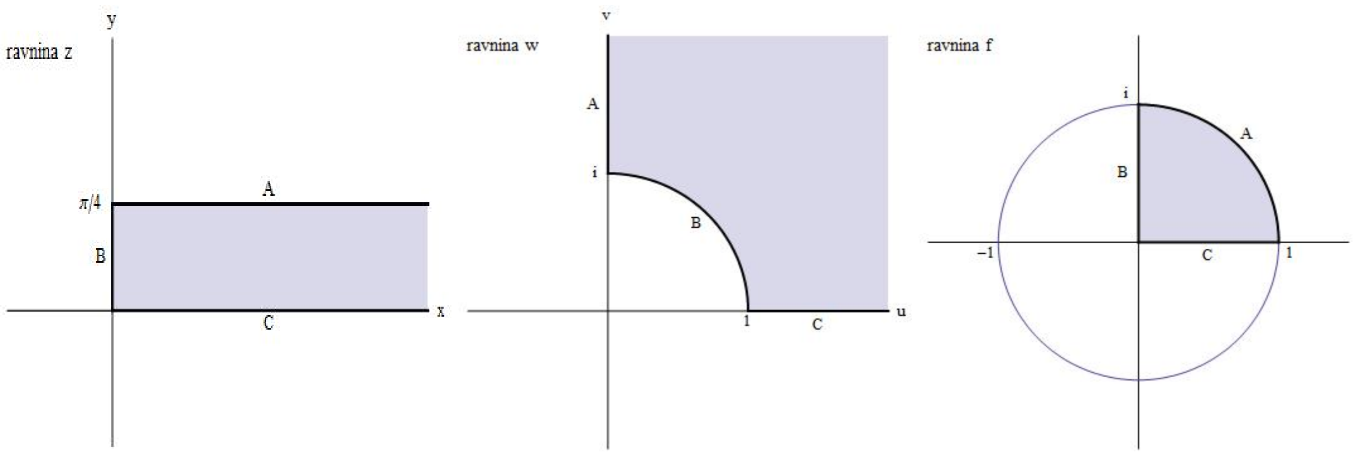
ker je $u = 0$, je slika na imaginarni osi v mejah $\ 0 < x < \infty \quad \to \quad 1 < v < \infty$

B : $\quad z = 0 + iy \quad \Longrightarrow \quad w = \cos 2y + i \sin 2y \quad \to \quad u^2 + v^2 = 1$

slika je na enotnem krogu med kotoma $0 \leq 2y \leq \frac{\pi}{2}$

C : $\quad z = x \quad \Longrightarrow \quad u = e^{2x}\,,\ v = 0$

slika je na realni osi v mejah $\ 0 < x < \infty \quad \to \quad 1 < u < \infty$



Preslikava $f = \frac{w-1}{w+1}$:

ravnina w		ravnina f
A: imaginarna os = krog skozi $0, i, i\infty$	$\Rightarrow$	krog skozi točke $-1, i, 1$ = enotni krog
del imaginarne osi med i in $i\infty$	$\Rightarrow$	del enotnega kroga med i in 1, prvi kvadrant
B: enotni krog skozi $1, i, -1$	$\Rightarrow$	krog skozi $0, i, \infty$ = imaginarna os
del enotnega kroga med 1 in i	$\Rightarrow$	del imaginarne osi med 0 in i
C: realna os = krog skozi $0, 1, \infty$	$\Rightarrow$	krog skozi $-1, 0, 1$ = realna os
del realne osi med 1 in ∞	$\Rightarrow$	del realne osi med točkama 0 in 1