PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

16. november 2004

1. Poiščite tisto tangetno ravnino na ploskev

$$\vec{r}(u,v) = (uv, \frac{u}{v}, \frac{1}{u^2}),$$

ki je pravokotna na tangento krivulje

$$\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}\arcsin(t^2-1), \frac{e^{t^3-1}}{3}, \sqrt{t^4+3})$$

v točki $T(0, \frac{1}{3}, 2)$.

Rešitev. Točka T je dosežena pri $t = 1$. Tako dobimo

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\frac{t}{\sqrt{1-(t^2-1)^2}}, e^{t^3-1}t^2, \frac{4t^2}{2\sqrt{t^4+3}})$$
$$\dot{\vec{r}}(1) = (1,1,1)$$

Glede ravnine si poračunamo

$$\vec{r}_u = (v, \frac{1}{v}, -\frac{2}{u^3})$$
$$\vec{r}_v = (u, -\frac{u}{v^2}, 0)$$
$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-\frac{2}{v^2u^2}, -\frac{2}{u^2}, -\frac{2u}{v})$$

Tako dobimo, da mora biti

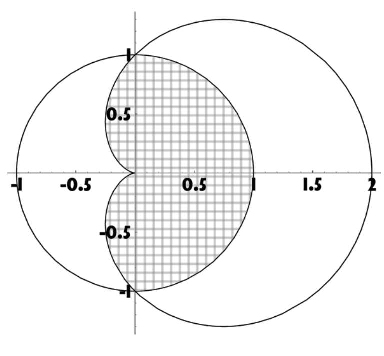
$$-\frac{2}{v^2u^2} = -\frac{2}{u^2} = -\frac{2u}{v},$$

iz česar pa takoj dobimo $u = 1$ in $v = 1$. Točka na ploskvi je tako $S(1,1,1)$ in zato se iskana tangentna ravnina glasi $x + y + z = 3$.

2. Izračunajte ploščino lika, ki ga dobite kot presek območij

$$x^2 + y^2 \le 1 \text{ in } \sqrt{x^2+y^2} \le 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Rešitev. V polarnih koordinatah se ti neenačbi glasita $r^2 \le 1$ in $r \le 1 + \cos\phi$. Tako dobimo naslednjo sliko:



Računamo:

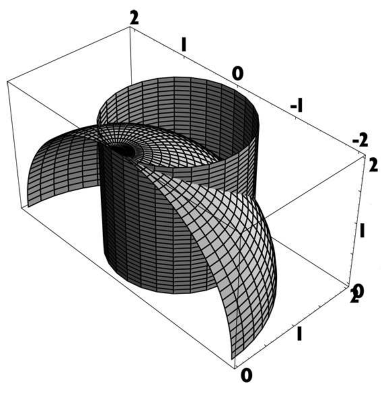
$$
\begin{aligned}
S &= 2\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^1 r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\phi \int_0^{1+\cos\phi} r dr\Big) = \\
&= \frac{\pi}{2} + 2\Big(\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{(1+\cos\phi)^2}{2}\, d\phi\Big) = \\
&= \frac{\pi}{2} + \Big(\phi + 2\sin\phi + \frac{1}{2}\phi + \frac{1}{4}\sin(2\phi)\Big)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\pi}{4} = \\
&= \frac{5\pi}{4} - 2.
\end{aligned}
$$

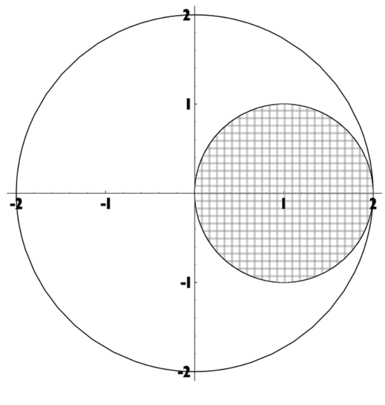
3. Izračunajte prostornino tistega dela telesa, omejenega s ploskvami

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ \ x^2 + y^2 = 2x, \ \ z = 0,$$

ki vsebuje točko $T(1,0,1)$.

Rešitev. Ti dve ploskvi nam predstavljata sfero v središčni legi s polmerom 2 in plašč valja, katerega projekcija valja na xy ravnino je krožnica s središčem v točki $S(1,0)$ in polmerom 1. Tako je tudi projekcija našega iskanega telesa na xy ravnino kar ta enaka krožnica.





Uvedimo cilindrične koordinate in pozneje v računanju uvedemo substitucijo $u = 4 - r^2$:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{2\cos\phi} dr \int_0^{\sqrt{4-r^2}} r dz = \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{2\cos\phi} r(\sqrt{4-r^2}) dr = \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_4^{4\sin^2\phi} \frac{\sqrt{u}}{-2} du = \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{16\sin^3\phi}{3} - \frac{16}{3}\Big) d\phi = \\
&= -\frac{16}{3}\Big(\frac{1}{3}\cos^3\phi - \cos\phi\Big)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{8\pi}{3} = \\
&= \frac{8\pi}{3} - \frac{32}{9}.
\end{aligned}
$$