PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

13. december 2005

1. Vzemimo skalarno polje $U = e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}}$ in točko $T(0,0,1)$.

   (a) Izračunaj smerni odvod skalarnega polja U v točki T in smeri najhitrejšega spreminjanja.

   (b) Poišči enačbo nivojske ploskve (v implicitni obliki) skalarnega polja U, ki gre skozi točko T.

   (c) Poišči enačbo normalne premice in tangentne ravnine na omenjeno nivojsko ploskev v točki T.

   Rešitev.

   (a) Najhitreje se polje spreminja v smeri gradienta in tako računamo

   $$\begin{aligned} \operatorname{grad} U &= \left(e^{\frac{x}{z}} \frac{1}{z}, e^{\frac{y}{z}} \frac{1}{z}, e^{\frac{x}{z}}(-\frac{x}{z^2}) + e^{\frac{y}{z}}(-\frac{y}{z^2}) \right) \\ \operatorname{grad} U(0,0,1) &= (1,1,0) \end{aligned}$$

   ter dobimo, da je iskani smerni odvod enak

   $$(1,1,0) \cdot \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

   (b) Ker je $U(0,0,1) = 2$, je iskana nivojska ploskev $e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}} = 2$.

   (c) Normalni vektor tangentne ravnine omenjene nivojske ploskve, je kar enak $\operatorname{grad} U(0,0,1) = (1,1,0)$ in ker ta ravnina vsebuje tudi točko $T(0,0,1)$ dobimo enačbo tangentne ravnine enako $x + y = 0$. Prav tako je smerni vektor normalne premice enak $\operatorname{grad} U(0,0,1) = (1,1,0)$ in ker prav tako tudi $T(0,0,1)$ leži na njej, dobimo enačbo normalne premice (v parametrični obliki) enako $x = t, y = t, z = 1$ oz. v kanonični obliki $x = y, z = 1$.

2. Izračunaj površino telesa, ki ga določata

   $$x^2 + y^2 + z^2 \le 2 \text{ in } z \ge \sqrt{x^2 + y^2}.$$

   Rešitev. Telo je sestavljeno iz dveh ploskev; stožca in dela sfere. Projekcija presečišča na xy-ravnino je $x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2$ oz. krožnica v središčni legi in polmerom 1. Poračunajmo površino vsakega dela zase. Najprej recimo stožec:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2+y^2} \\ z_x &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ z_y &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

In tako površina po delu, kjer je stožec, enaka (po uvedbi polarnih koordinat):

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \sqrt{2} r dr = \sqrt{2}\pi.$$

Sedaj pa še del sfere:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2-x^2-y^2} \\ z_x &= -\frac{x}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\ z_y &= -\frac{y}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\ \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} &= \sqrt{\frac{2}{2-x^2-y^2}} \end{aligned}$$

In tako površina po delu, kjer je sfera, enaka (po uvedbi polarnih koordinat in pomočjo substitucije $t = 2 - r^2$):

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^1 \sqrt{\frac{2}{2-r^2}}\, r\, dr = 4\pi - 2\sqrt{2}\pi.$$

Skupna površina je tako enaka

$$\sqrt{2}\pi + 4\pi - 2\sqrt{2}\pi = \pi(4-\sqrt{2}).$$

3. Preveri, ali je kateri od integralov

$$\int_C \left(\frac{1}{1+x^2} + yz\right) dx + xz\, dy + (xy - 2z) dz$$

in

$$\int_C 3x^2 dx + 6yz\, dy + 3(y^2 + x) dz$$

neodvisen od poti. Oba integrala nato tudi izračunaj za primer, ko je C daljica od točke $A(1,1,1)$ do točke $B(3,0,-3)$.

Rešitev.

- $\int_C \left(\frac{1}{1+x^2}+yz\right)dx + xz\,dy + (xy-2z)dz$:

$$\vec{V} = \left(\frac{1}{1+x^2}+yz, xz, xy-2z\right)$$
$$\operatorname{rot}\vec{V} = (x-x, y-y, z-z) = (0,0,0)$$

torej je integral neodvisen od poti, zato je dovolj, da poračunamo potencial tega vektorskega polja in dobimo

$$U = \int \left(\frac{1}{1+x^2}+yz\right)dx = \operatorname{arctg} x + xyz + C(y,z)$$
$$U = \int xzdy = xyz + C(x,z)$$
$$U = \int (xy-2z)dz = xyz - z^2 + C(x,y)$$
$$U = \operatorname{arctg} x + xyz - z^2 + C$$

in tako

$$\int_C \left(\frac{1}{1+x^2}+yz\right)dx + xz\,dy + (xy-2z)dz = U(B) - U(A) = \operatorname{arctg} 3 - \frac{\pi}{4} - 9.$$

- $\int_C 3x^2dx + 6yz\,dy + 3(y^2+x)dz$:

$$\vec{V} = (3x^2, 6yz, 3(y^2+x))$$
$$\operatorname{rot}\vec{V} = (6y-6y, 0-3, 0-0) = (0,-3,0)$$

torej je integral odvisen od poti. Parametrizirajmo pot:

$$\vec{r}(t)\vec{r}_A + t(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = (1+2t, 1-t, 1-4t), 0 \le t \le 1$$

in računajmo

$$\int_C 3x^2dx + 6yz\,dy + 3(y^2+x)dz =$$
$$= \int_0^1 \big(3(1+2t)^2 2 + 6(1-t)(1-4t)(-1) + 3((1-t)^2+1+2t)(-4)\big)\,dt =$$
$$= -1$$