DRUGI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

7. januar 2008

1. Dokažite, da je krivuljni integral

$$\int_C \left(\arctan y + ze^x, \frac{x}{1+y^2} + z^3, 3yz^2 + e^x\right) d\vec{r}$$

neodvisen od poti iz ga za primer, ko je C neka krivulja od točke $A(1,0,0)$ do točke $B(0,1,2)$, tudi izračunajte.

Rešitev. Računajmo:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \left(3z^2 - 3z^2, e^x - e^x, \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+y^2}\right) = (0,0,0)$$

$$\int (\arctan y + ze^x)\, dx = x\arctan y + ze^x + D(y,z)$$

$$\int \left(\frac{x}{1+y^2} + z^3\right) dy = x\arctan y + yz^3 + D(x,z)$$

$$\int (3yz^2 + e^x)\, dz = yz^3 + ze^x + D(x,y)$$

$$U(x,y,z) = x\arctan y + ze^x + yz^3 + D$$

Integral se nam tako prevede v

$$U(B) - U(A) = 10.$$

2. S pomočjo Gaussove formule izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \left(e^{y^2z} + \sin x + x - xz,\ \log(1+x^2z^2) - y\cos x - \frac{y}{7},\ \arcsin(x^3) - \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{2}\right)$$

skozi zaključeno ploskev, ki je rob telesa, dobljenega s preseki

$$x^2 + y^2 \leq 1,\ \ z \geq x^2 + y^2 - 3 \ \text{ in } \ z \leq 3 - x^2.$$

Rešitev. Divergenca vektorskega polja $\vec{V}$ je enaka

$$\operatorname{div}\vec{V} = \cos(x) + 1 - z - \cos(x) - \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + z = \frac{4}{21}$$

in zato se integral po uvedbi cilindričnih koordinat prevede do

$$\frac{4}{21}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2-3}^{3-r^2\cos^2\varphi} r\, dz = \ldots = \pi$$

3. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{|z+\frac{i}{2}|=1} \frac{1}{z(z+i)^2(z+1)}\, dz,$$

kjer je integracija v pozitivni smeri.

Rešitev. Singularnosti znotraj našega območja sta le $z = 0$ in $z = -i$, zato upoštevamo le ta dva residuuma. Singularnost $z = 0$ je pol prve stopnje, singularnost $z = -i$ pa pol druge stopnje.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z(z+i)^2(z+1)} &= \lim_{z\to 0}\frac{1}{(z+i)^2(z+1)} = ... = -1\\
\mathrm{Res}_{z=-i}\frac{1}{z(z+i)^2(z+1)} &= \lim_{z\to -i}\left(\frac{1}{z(z+1)}\right)' = \lim_{z\to -i}\frac{-2z-1}{z^2(z+1)^2} = \frac{2i-1}{(-i)^2(-i+1)^2} =\\
&= ... = 1+\frac{i}{2}
\end{aligned}$$

Integral se nam tako prevede v

$$\begin{aligned}
&= 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z=0}\frac{1}{z(z+i)^2(z+1)} + \mathrm{Res}_{z=-i}\frac{1}{z(z+i)^2(z+1)}\right) =\\
&= 2\pi i\left(-1+1+\frac{i}{2}\right) = -\pi
\end{aligned}$$