PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

20. november 2008

1. Poiščite enačbo tiste tangentne ravnine na ploskev

$$\vec{r}(u,v) = \big(u^2\cos^2(v),\, u\sin^2(v),\, u\big),$$

ki je vzporedna ravnini $\Sigma : x + 2y - 3z = 1$.

Rešitev.

$$\begin{aligned}
\vec{r_u}(u,v) &= \big(2u\cos^2(v),\, \sin^2(v),\, 1\big)\\
\vec{r_v}(u,v) &= \big(-2u^2\cos(v)\sin(v),\, 2u\cos(v)\sin(v),\, 0\big)\\
\vec{n} &= \vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v) =\\
&= \Big(-2u\cos(v)\sin(v), -2u^2\cos(v)\sin(v), 4u^2\cos^3(v)\sin(v)+\\
&+ 2u^2\cos(v)\sin^3(v)\Big) =\\
&= \Big(-u\sin(2v),\, -u^2\sin(2v),\, u^2\sin(2v)\big(\cos^2(v)+1\big)\Big)
\end{aligned}$$

Vzporednost z ravnino Σ nam da sistem enačb

$$-u\sin(2v) = k, \quad -u^2\sin(2v) = 2k, \quad u^2\sin(2v)\big(\cos^2(v)+1\big) = -3k.$$

Z deljenjem prvih dveh enačb takoj dobimo $u = 2$, z deljenjem zadnjih dveh pa $\cos^2(v) = \frac{1}{2}$, iz česar sledi še $\sin^2(v) = 1 - \cos^2(v) = \frac{1}{2}$. Iz povedanega tako dobimo iskano točko na naši ploskvi $T(2,1,2)$ in tangentno ravnino

$$x + 2y - 3z = 2 + 2 - 6 = -2.$$

2. Ali ima funkcija

$$F(y) = \int_0^{\frac{2\pi}{y}} \frac{1-\cos(xy)}{x}\, e^{-3x}\, dx$$

kakšen ekstrem?

Rešitev. Iskanje ekstremov te funkcije $F(y)$ se najprej prevede na reševanje enačbe $F'(y) = 0$. Zato računajmo

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_0^{\frac{2\pi}{y}} e^{-3x}\sin(xy)\,dx + \frac{1-\cos(\frac{2\pi}{y}y)}{\frac{2\pi}{y}}\,e^{-3\frac{2\pi}{y}}\Big(-\frac{2\pi}{y^2}\Big) = \\ &= \int_0^{\frac{2\pi}{y}} e^{-3x}\sin(xy)\,dx = \\ &= \frac{e^{-3x}}{9+y^2}\big(-3\sin(xy) - y\cos(xy)\big)\Big|_0^{\frac{2\pi}{y}} = \\ &= \frac{y}{9+y^2}\left(1 - e^{-\frac{6\pi}{y}}\right) \end{aligned}$$

Enačba $F'(y) = 0$ ima tako le eno rešitev $y = 0$, ki pa ni v definicijskem območju funkcije $F(y)$, saj bi v tem primeru v zgornji meji integrala delili z 0. Torej funkcija $F(y)$ nima ekstremov.

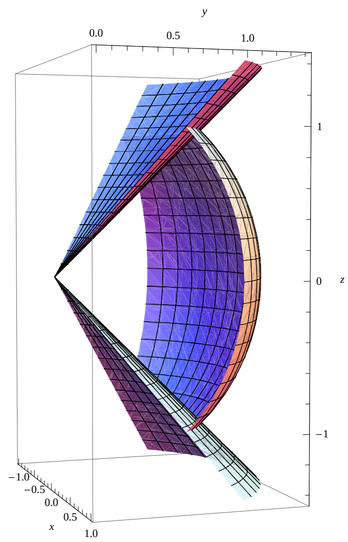
3. Izračunajte trojni integral

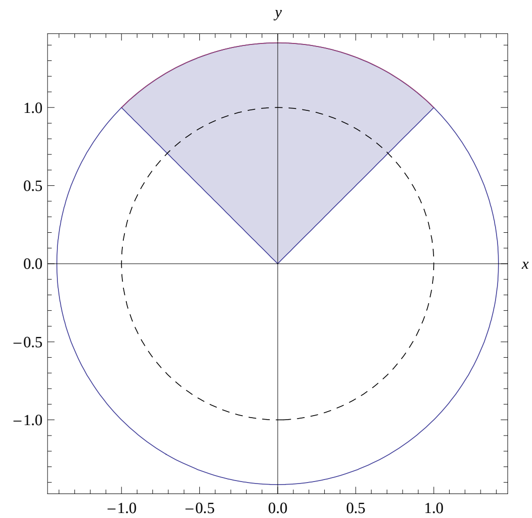
$$\iiint_V \sqrt{2-x^2-y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

kjer je območje V določeno z

$$z^2 \le x^2+y^2, \qquad x^2+y^2+z^2 \le 2, \qquad y \ge x, \qquad y \ge -x.$$

Rešitev. Prva neenačba nam predstavlja območje med dvema stožcema, druga notranjost krogle, zadnji dve pa polprostora, ki sta določena z navpičnima ravninama $y = x$ in $y = -x$. Tako dobimo skico območja in skico projekcije le-tega na xy-ravnino, ki predstavlja integracijsko območje:





Uvedemo cilindrične koordinate. Vidimo, da sta meji za z odvisni pri kakšnem r smo; do presečišča stožcev in sfere sta meji oba stožca, dalje sta pa meji spodnja in zgornja polovica sfere. Presečišče dobimo z enačenjem enačb omenjenih ploskev

$$x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \qquad \text{oziroma} \qquad x^2 + y^2 = 1,$$

zunanja meja integracijskega območja je pa jasno sfera pri $z = 0$, torej $x^2 + y^2 = 2$. Tako se nam iskani integral prevede do

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dr \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_{-r}^{r} r\sqrt{2-r^2}\, dz + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_{-\sqrt{2-r^2}}^{\sqrt{2-r^2}} r\sqrt{2-r^2}\, dz = \\
&= \int_0^1 dr \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2r^2\sqrt{2-r^2}\, d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} dr \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2r(2-r^2)\, d\varphi = \\
&= \pi \int_0^1 r^2\sqrt{2-r^2}\, dr + \pi \int_1^{\sqrt{2}} r(2-r^2)\, dr = \\
&= \pi \left(-\frac{r}{4}\sqrt{(2-r^2)^3} + \frac{2}{8}\left(r\sqrt{2-r^2} + 2\arcsin\frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right) \Bigg|_0^1 + \pi \left(r^2 - \frac{r^4}{4} \right) \Bigg|_1^{\sqrt{2}} = \\
&= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$