DRUGI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

15. januar 2009

1. (a) Določite konstanto k tako, da bo vektorsko polje

$$\vec{V} = \left(\frac{(k+2)^2 y}{1+x^2y^2} + 2e^{yz}\cos x,\ \frac{x}{1+x^2y^2} + (k^2+1)e^{yz}z\sin x,\ -2z + 2e^{yz}y\sin x\right)$$

potencialno.

(b) Pri vrednosti parametra k iz točke (a) izračunajte integral

$$\int \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

od točke $A(\frac{\pi}{6}, 0, 2)$, do točke $B(0,1,1)$.

Rešitev.

(a) Polje $\vec{V}$ bo potencialno, če bo $\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0}$. Zato računajmo:

$$\begin{aligned}
R_y &= 2e^{yz}\sin x + 2e^{yz}yz\sin x \\
Q_z &= (1+k^2)e^{yz}\sin x + (1+k^2)e^{yz}yz\sin x \\
P_z &= 2e^{yz}y\cos x \\
R_x &= 2e^{yz}y\cos x \\
Q_x &= -\frac{2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} + \frac{1}{1+x^2y^2} + (1+k^2)e^{yz}z\cos x \\
P_y &= -\frac{2(2+k)^2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} + \frac{(2+k)^2}{1+x^2y^2} + 2e^{yz}z\cos x
\end{aligned}$$

Iz dejstva $\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{0}$ takoj dobimo zgolj dve enostavni zahtevi $1 + k^2 = 2$ in $(2+k)^2 = 1$ in tako končno edino rešitev $k = -1$.

(b) Ker je po točki (a) v tem primeru polje $\vec{V}$ potencialno, izračunajmo njegov potencial, saj je vrednost iskanega integrala v takem primeru enaka razliki potencialov v posameznih točkah

$$\begin{aligned}
U &= \int P\,dx = \int \left(\frac{y}{1+x^2y^2} + 2e^{yz}\cos x\right)dx = \arctan(xy) + 2e^{yz}\sin x + C(y,z) \\
U &= \int Q\,dy = \int \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + 2e^{yz}z\sin x\right)dy = \arctan(xy) + 2e^{yz}\sin x + C(x,z) \\
U &= \int R\,dz = \int (-2z + 2e^{yz}y\sin x)\,dz = -z^2 + 2e^{yz}\sin x + C(x,y) \\
U &= \arctan(xy) + 2e^{yz}\sin x - z^2 + C
\end{aligned}$$

Tako dobimo

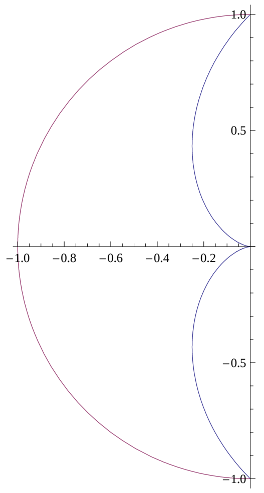
$$\int \vec{V} \cdot d\vec{r} = U(B) - U(A) = -1 - (1-4) = 2$$

2. Uporabite Greenovo formulo za izračun krivuljnega integrala

$$\int_C \big(\arctan(x^2) + y^3 + 10xy - y\big)\,dx + \left(\sin\Big(\frac{e^y}{y^2+1}\Big) + 5x^2 + 3xy^2 + 3x\right) dy,$$

kjer je C pozitivno orientirana krivulja, sestavljena iz tistega dela krožnice $x^2+y^2=1$, kjer je $x<0$ in tistega dela kardioide $r = 1+\cos\varphi$, kjer je $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$.

Rešitev. Naša krivulja izgleda tako:



Z uporabo Greenove formule in nato uvedbo polarnih koordinat se integral računa:

$$\begin{aligned}
... &= \iint_D 4\,dxdy = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_{1+\cos\varphi}^{1} r\,dr = \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} r^2\Big|_{1+\cos\varphi}^{1}\,d\varphi = \\
&= 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \big(1-(1+\cos\varphi)^2\big)\,d\varphi = \\
&= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \big(2\cos\varphi + \cos^2\varphi\big)d\varphi = \\
&= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(2\cos\varphi + \frac{1+\cos(2\varphi)}{2}\right) d\varphi = \\
&= \left(-4\sin(\varphi) - \varphi - \frac{1}{2}\sin(2\varphi)\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \\
&= ... = 8-\pi
\end{aligned}$$

3. (a) Rešite enačbo $\tan z = 2i$.

(b) Poiščite residuum funkcije

$$f(z) = \frac{1}{\tan z - 2i}$$

v točki $z_0 = \frac{\pi}{2} + i\,\frac{\log 3}{2}$.

Rešitev.

(a) Opomba: Tekom računanja bomo uvedli substitucijo $e^{iz} = u$

$$\begin{aligned}
\tan z &= 2i \\
\frac{\sin z}{\cos z} &= 2i \\
\frac{(e^{iz} - e^{-iz})2}{2i(e^{iz} + e^{-iz})} &= 2i \\
u - u^{-1} &= -2(u + u^{-1}) \\
u^2 - 1 &= -2u^2 - 2 \\
u^2 &= -\frac{1}{3} \\
u &= \pm i\frac{1}{\sqrt{3}} \\
e^{iz} &= \pm i\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Tako smo dobili dve možnosti, kjer vsako zase logaritmiramo in dobimo dve družini enačb (kjer $k \in \mathbb{Z}$):

$$\begin{aligned}
iz_{1,k} &= \log\left|\frac{i}{\sqrt{3}}\right| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{2}\log(3) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\
iz_{2,k} &= \log\left|-\frac{i}{\sqrt{3}}\right| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -\frac{1}{2}\log(3) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)
\end{aligned}$$

in posledično dve družini rešitev:

$$\begin{aligned}
z_{1,k} &= \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\,\frac{1}{2}\log(3) \\
z_{2,k} &= \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\,\frac{1}{2}\log(3)
\end{aligned}$$

ki jih lahko zapišemo s skupnim zapisom

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i\,\frac{1}{2}\log(3), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Ker je $z_0 = \frac{\pi}{2} + i\,\frac{\log 3}{2}$ pol prve stopnje za $f(x)$, lahko uporabimo formulo:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z\to z_0} \frac{z - \frac{\pi}{2} - i\,\frac{\log 3}{2}}{\tan z - 2i} = \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 z}} = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + i\,\frac{\log 3}{2}\right) =^* \\
&=^* \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(i\,\frac{\log 3}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(i\,\frac{\log 3}{2}\right)\right)^2 = \\
&= \sin^2\left(i\,\frac{\log 3}{2}\right) = i^2\operatorname{sh}^2\left(\frac{\log 3}{2}\right) = \\
&= -\operatorname{sh}^2\left(\frac{\log 3}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\right)^2 = \\
&= -\frac{3 - 2 + \frac{1}{3}}{4} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Tekom računanja smo uporabili nekaj znanih dejstev: L'Hospital-ovo pravilo, adicijski izrek za funkcijo kosinus, $\sin(ix) = i\operatorname{sh}(x)$ za $x \in \mathbb{R}$ in $e^{\log x} = x$. Del, označen z $*$ lahko nadaljujemo tudi na nekoliko drugačen način:

$$
\begin{aligned}
&=^* \left(\frac{e^{-\frac{\log 3}{2} + i\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\log 3}{2} - i\frac{\pi}{2}}}{2}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\big) + \sqrt{3}\big(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\big)}{2}\right)^2 = \\
&= \left(\frac{\frac{i}{\sqrt{3}} - i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-\frac{1}{3} + 2 - 3}{4} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$