PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

27. november 2009

1. Poiščite tisto tangentno ravnino na ploskev

$$\vec{r}(u,v) = (u+v, u^2+v^2, u^3+v^3),$$

ki je vzporedna ravnini $3x - z = 3$.

Rešitev. Poiščimo najprej normalo naše ploskve:

$$\begin{aligned} \vec{r_u}(u,v) &= (1, 2u, 3u^2) \\ \vec{r_v}(u,v) &= (1, 2v, 3v^2) \\ \vec{n} &= \vec{r_u}(u,v) \times \vec{r_v}(u,v) = \\ &= (-6u^2v + 6uv^2, 3u^2 - 3v^2, -2u + 2v) \end{aligned}$$

Zaradi vzporednosti omenjenih ravnin mora veljati

$$(-6u^2v + 6uv^2, 3u^2 - 3v^2, -2u + 2v) = k(3, 0, -1)$$

oziroma

$$\begin{aligned} 6uv(v-u) &= 3k \\ 3(u^2 - v^2) &= 0 \\ 2(v-u) &= -k \end{aligned}$$

Iz druge enačbe takoj vidimo le dve možnosti; $u = v$ ali $u = -v$, pri čemer zaradi tretje enačbe možnost $u = v$ takoj odpade (saj k ne sme biti enak 0). Tako nam ostane za rešiti le še enostaven sistem

$$\begin{aligned} -4v^3 &= k \\ 4v &= -k \end{aligned}$$

oziroma

$$v^3 = v \quad \longrightarrow \quad v(v-1)(v+1) = 0.$$

Možnost $v = 0$ takoj odpade (saj bi dobili, da velja tudi $k = 0$) in tako dobimo dve rešitvi

$$u = 1,\ v = -1,\ k = 4 \quad \text{in} \quad u = -1,\ v = 1,\ k = 4,$$

pri čemer pa v obeh primerih dobimo enako točko $T(0, 2, 0)$. Iskana ravnina se tako glasi $3x - z = d$, kjer d poračunamo z vstavljanjem izračunane točke T in dobimo $3x - z = 0$.

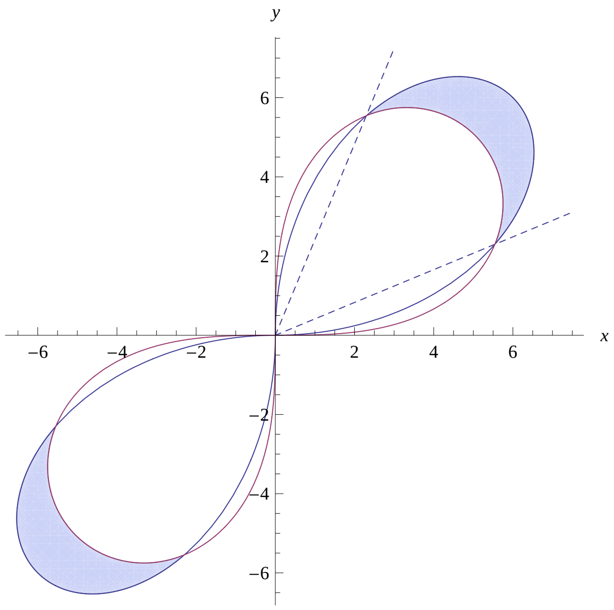
2. Izračunajte ploščino območja, določenega z

$$6\sqrt{\sqrt{2}\sin 2\varphi} \le r \le 6\sqrt{2}\sin 2\varphi.$$

Območje najprej skicirajte!

Rešitev.

Najprej opazimo/poračunamo, da je zaradi definiranosti korena leva krivulja definirana le v prvem in tretjem kvadrantu in nato, da je zaradi simetričnosti (periodičnosti) v resnici dovolj gledati le prvi kvadrant (ter nato rezultat enostavno pomnožimo z 2).



Krivulji se sekata, ko velja

$$\begin{aligned} 6\sqrt{\sqrt{2}\sin 2\varphi} &= 6\sqrt{2}\sin 2\varphi \\ \sqrt{2}\sin 2\varphi &= 2\sin^2 2\varphi \\ \sin 2\varphi\,(\sqrt{2} - 2\sin 2\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

Z upoštevanjem, da gledamo le prvi kvadrant, dobimo

$$\begin{array}{lllll} \sin 2\varphi = 0 & \longrightarrow & 2\varphi = 0 & \longrightarrow & \varphi = 0 \\ \sin 2\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \longrightarrow & 2\varphi = \dfrac{\pi}{4},\ 2\varphi = \dfrac{3\pi}{4} & \longrightarrow & \varphi = \dfrac{\pi}{8},\ \varphi = \dfrac{3\pi}{8} \end{array}$$

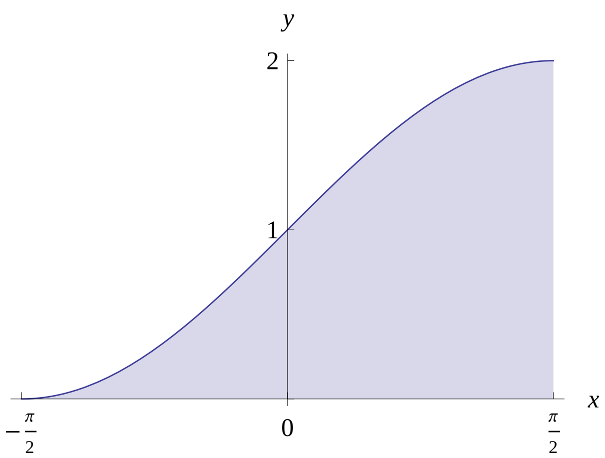
Tako dobimo

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} d\varphi \int_{6\sqrt{\sqrt{2}\sin 2\varphi}}^{6\sqrt{2}\sin 2\varphi} r\; dr = \\
&= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} r^2\Big|_{6\sqrt{\sqrt{2}\sin 2\varphi}}^{6\sqrt{2}\sin 2\varphi} d\varphi = \\
&= 36\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \left(2\sin^2 2\varphi - \sqrt{2}\sin 2\varphi\right) d\varphi = \\
&= 36\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \left((1-\cos 4\varphi) - \sqrt{2}\sin 2\varphi\right) d\varphi = \\
&= 9\left(4\varphi - \sin 4\varphi + 2\sqrt{2}\cos 2\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} = \\
&= ... = 9\pi - 18
\end{aligned}
$$

3. Izračunajte prostornino telesa, določenega z

$$y \geq 0,\ z \geq 0,\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ y \leq 1 + \sin x,\ z \leq 3y^2 \cos x + 1.$$

Rešitev. Projekcija našega telesa na xy-ravnino izgleda tako:



Torej se prostornina izračuna z naslednjim integralom:

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{1+\sin x} dy \int_0^{3y^2\cos x\ +1} dz = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{1+\sin x} (3y^2 \cos x\ +1)\, dy = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (y^3 \cos x\ + y)\Big|_0^{1+\sin x} dx = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \big((1+\sin x)^3 \cos x\ + (1+\sin x)\big)\, dx = \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)^3 \cos x\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sin x)\, dx = \\
&= \int_0^2 t^3\, dt + (x - \cos x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= ... = 4 + \pi.
\end{aligned}
$$

Tekom računanja smo uvedli substitucijo $t = 1 + \sin x$.