PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

26. november 2010

1. Vzemimo krivuljo $\vec{r}(t) = \left(2\sin\frac{t}{3}, 2\cos\frac{t}{3}, -\frac{\sqrt{5}\,t}{3}\right)$.

   (a) Poišči tisto tangento na dano krivuljo $\vec{r}(t)$, ki je pravokotna na ravnino $x - \sqrt{3}y - \sqrt{5}z = 10$.

   (b) Z uporabo dejstva, da je dana parametrizacija $\vec{r}(t)$ v resnici naravna parametrizacija (oziroma t je naravni parameter), izračunajte dolžino krivulje $\vec{r}(t)$ od točke $A\left(1, \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{5}\,\pi}{6}\right)$ do točke $B\left(2, 0, -\frac{\sqrt{5}\,\pi}{2}\right)$.

   Rešitev.

   (a)

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \left(2\sin\frac{t}{3}, 2\cos\frac{t}{3}, -\frac{\sqrt{5}t}{3}\right)\\
\dot{\vec{r}}(t) &= \left(\frac{2}{3}\cos\frac{t}{3}, -\frac{2}{3}\sin\frac{t}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\\
\vec{n} &= (1, -\sqrt{3}, -\sqrt{5})\\
\dot{\vec{r}}(t) &= k\,\vec{n} \quad \text{(zaradi pravokotnosti na ravnino)}\\
k &= \frac{1}{3}, \quad t = \pi
\end{aligned}$$

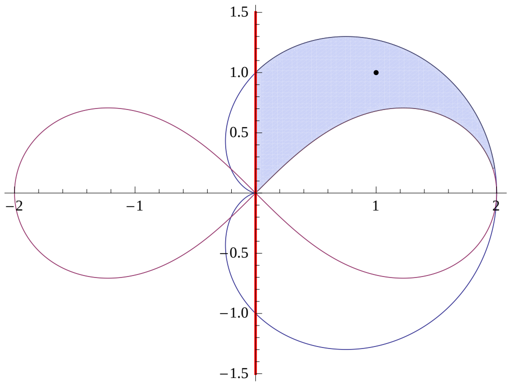
   Tako smo dobili točko $T\left(\sqrt{3}, 1, -\frac{\sqrt{5}}{3}\pi\right)$, v kateri je tangeta na krivuljo $\vec{r}(t)$ pravokotna na dano ravnino. Posledično se iskana tangenta glasi

$$x - \sqrt{3} = \frac{y-1}{-\sqrt{3}} = \frac{z + \frac{\sqrt{5}}{3}\pi}{-\sqrt{5}}.$$

   (b) Za naravno parametrizacijo vemo, da je dolžina krivulje med dvema točkama enaka kar razliki pripadajočih parametrov. Hitro vidimo, da je točka A dosežena pri $t = \frac{\pi}{2}$ in točka B pri $t = \frac{3\pi}{2}$. Kar pomeni, da je iskana dolžina enaka $\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \pi$.

2. Izračunajte ploščino območja, ki vsebuje točko $T(1,1)$ in je omejeno s srčnico $r = 1 + \cos\varphi$, lemniskato $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ in premico $x = 0$.

   Rešitev. Za lemniskato vemo (ali vidimo takoj), da je zaradi korena definirana le za $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ in $\frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}$, saj je le v teh primerih $\cos 2\varphi \ge 0$. Kar pomeni, da bomo morali integracijsko območje razdeliti na dva dela (tam, kjer je lemniskata definirana in tam, kjer ni). Glede na točko $T(1,1)$, ki leži v našem območju, vidimo, da je le-to v prvem kvadrantu, nad lemniskato in pod srčnico.

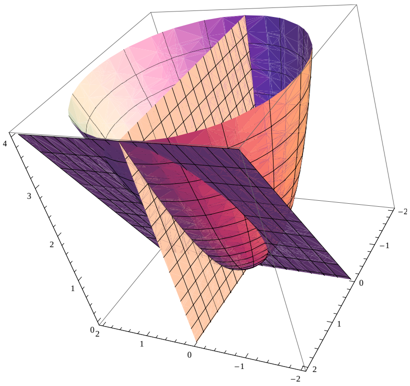
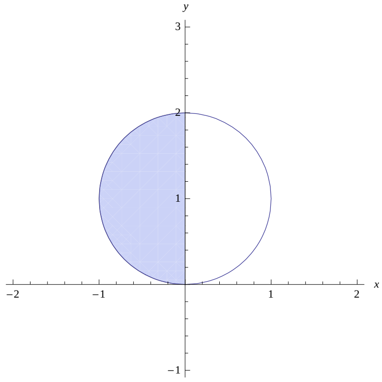


$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{2\sqrt{\cos 2\varphi}}^{1+\cos\varphi} r\,dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{1+\cos\varphi} r\,dr = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2}\Big|_{2\sqrt{\cos 2\varphi}}^{1+\cos\varphi} d\varphi + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{1+\cos\varphi} d\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \big((1+\cos\varphi)^2 - 4\cos 2\varphi\big) d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi - 4\cos 2\varphi)\,d\varphi + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2} - 4\cos 2\varphi)\,d\varphi + \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2})\,d\varphi = \\
&= \ldots = \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}
$$

3. Izračunajte prostornino telesa določenega z neenačbami

$$
\begin{aligned}
&z \geq x^2 + y^2, \\
&z \leq 2y, \\
&x \leq 0.
\end{aligned}
$$

Rešitev. Projekcija našega telesa na xy ravnino je $x^2 + y^2 \leq 2y$ in $x \leq 0$ oziroma $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$ in $x \leq 0$, kar je leva polovica premaknjenega kroga s središčem v $(0,1)$ in polmerom 1. Uvedimo polarne koordinate, v katerih se mejna krožnica glasi $r^2 = 2r\sin\varphi$ oziroma $r = 2\sin\varphi$.

Tako dobimo

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} dr \int_{r^2}^{2r\sin\varphi} r\, dz = \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (2r^2 \sin\varphi - r^3) dr = \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{2}{3}\, 8 \sin^3\varphi\, \sin\varphi - \frac{1}{4}\, 16 \sin^4\varphi \right) d\varphi = \\
&= \frac{4}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^4\varphi\, d\varphi = \\
&= \frac{4}{3} \left(\frac{3\varphi}{8} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi + \frac{1}{32}\sin 4\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\
&= \ldots = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

Opomba. Nalogo se seveda da rešiti tudi v kartezičnih koordinatah (ustrezno daljši način), kjer se dobi

$$V = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{0} dx \int_{x^2+y^2}^{2y} dz,$$

ali z uporabo malenkost modificiranih cilindričnih koodinat $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi + 1$, $z = z$ in $J = r$, kjer dobimo

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 dr \int_{r^2+2r\sin\varphi+1}^{2r\sin\varphi+2} r\, dz$$