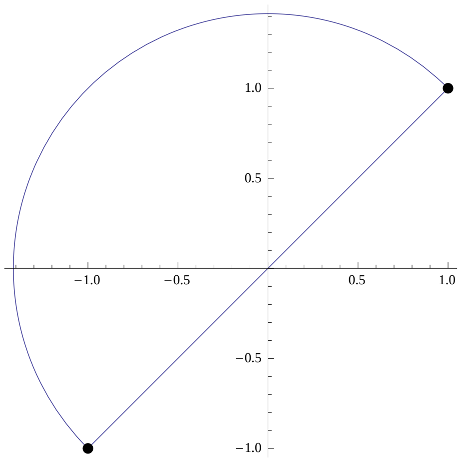
DRUGI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

14. januar 2011

1. Izračunajte
$$\oint_{\mathcal{C}} xy\, ds,$$
kjer je krivulja $\mathcal{C}$ sestavljena iz daljice od točke $A(-1,-1)$ do točke $B(1,1)$ in tistega dela krožnice $x^2+y^2=2$, kjer velja $y \geq x$.

Rešitev.



Posebej parametriziramo daljico in posebej del krožnice in tako dobimo vsoto dveh krivuljnih integralov.

Daljica: $x=t$, $y=t$, $-1 \leq t \leq 1$, $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{2}$.

Krožnica: $x=\sqrt{2}\cos\varphi$, $y=\sqrt{2}\sin\varphi$, $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$, $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{2}$.

Tako dobimo
$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} xy\, ds &= \int_{-1}^{1} t^2\sqrt{2}\, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} 2\sin\varphi\cos\varphi\,\sqrt{2}\, d\varphi = \\ &= \sqrt{2}\int_{-1}^{1} t^2\, dt + \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(2\varphi)\, d\varphi = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}t^3\Big|_{-1}^{1} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + 0 = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

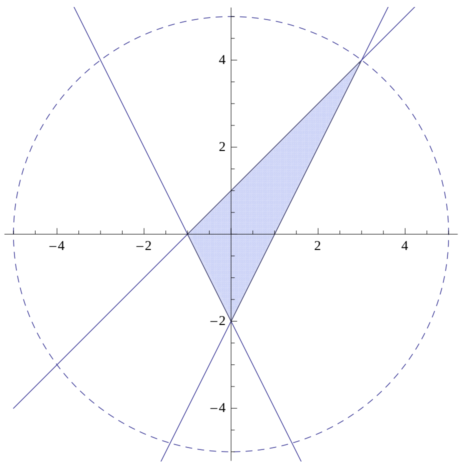
2. S pomočjo Gaussovega izreka izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \left(e^{x^2} + y\arctan\left(\frac{y}{z}\right),\ xz - 2xye^{x^2},\ z + y\sin\left(x^2\right)\right)$$

skozi rob tistega telesa, ki vsebuje točko $T(0,0,1)$ in je omejeno z ravninami $z = 0$, $x - y + 1 = 0,\ 2x - y - 2 = 0,\ 2x + y + 2 = 0$ ter paraboloidom $z = 25 - x^2 - y^2$.

Rešitev.
Sledimo namigu in tako najprej poračunajmo divergenco danega vektorskega polja:

$$\operatorname{div}\vec{V} = 2xe^{x^2} - 2xe^{x^2} + 1 = 1.$$



Iz enačb $x+1 = -2x-2$, $2x-2 = -2x-2$ in $x+1 = 2x-2$ takoj dobimo, da so potrebna presečišča premic pri $x = -1$, $x = 0$ in $x = 3$. Tako dobimo, da se naš iskani pretok vektorskega polja po Gaussovem izreku izračuna kot:

$$\begin{aligned}
... &= \iiint_V \operatorname{div}\vec{V}\,dxdydz = \\
&= \int_{-1}^{0} dx \int_{-2x-2}^{x+1} dy \int_{0}^{25-x^2-y^2} dz + \int_{0}^{3} dx \int_{2x-2}^{x+1} dy \int_{0}^{25-x^2-y^2} dz = \\
&= \int_{-1}^{0} dx \int_{-2x-2}^{x+1} \left(25 - x^2 - y^2\right) dy + \int_{0}^{3} dx \int_{2x-2}^{x+1} \left(25 - x^2 - y^2\right) dy = \\
&= \int_{-1}^{0} \left(25y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2x-2}^{x+1} dx + \int_{0}^{3} \left(25y - x^2y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{2x-2}^{x+1} dx = ... = \\
&= \int_{-1}^{0} \left(-6x^3 - 12x^2 + 66x + 72\right) dx + \int_{0}^{3} \left(\frac{10x^3}{3} - 12x^2 - 18x + 72\right) dx = \\
&= ... = 131
\end{aligned}$$

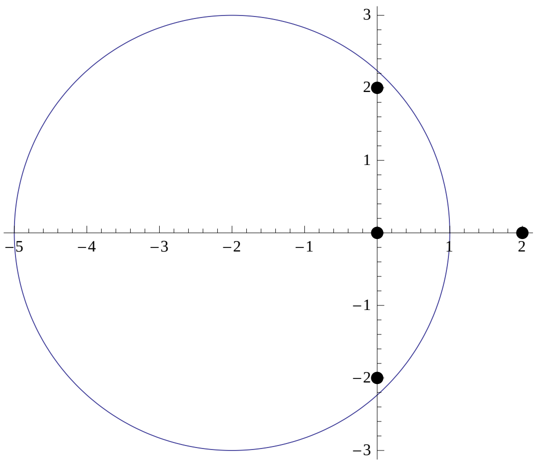
3. Izračunajte kompleksni integral

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^2(z-2)(z^2+4)},$$

kjer je $\mathcal{C}$ pozitivno orientirana krivulja $|z+2| = 3$.

Rešitev.

Singularnosti naše funkcije so $z = 0$, $z = \pm 2i$ in $z = 2$, od katerih so znotraj območja vse, razen $z = 2$, pri čemer sta $z = \pm 2i$ pola prve stopnje, $z = 0$ pa pol druge stopnje.



Poračunajmo si torej le residuume v singularnostih, ki so znotraj območja.

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}_{z=0} f(z) &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{(z-2)(z^2+4)}\right)' = \lim_{z\to 0}\frac{-3z^2+4z-4}{(z-2)^2(z^2+4)^2} = \frac{-4}{4\cdot 16} = -\frac{1}{16}\\
\operatorname{res}_{z=2i} f(z) &= \lim_{z\to 2i}\frac{1}{z^2(z-2)(z+2i)} = \frac{1}{-4(2i-2)4i} = \frac{1}{32+32i} = \frac{1-i}{64}\\
\operatorname{res}_{z=-2i} f(z) &= \overline{\operatorname{res}_{z=2i} f(z)} = \frac{1+i}{64}
\end{aligned}$$

Iskan integral je tako enak

$$\begin{aligned}
\ldots &= 2\pi i\left(\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \operatorname{res}_{z=2i} f(z) + \operatorname{res}_{z=-2i} f(z)\right) =\\
&= 2\pi i\left(-\frac{1}{16}+\frac{1-i}{64}+\frac{1+i}{64}\right) = 2\pi i\left(-\frac{1}{32}\right) =\\
&= -\frac{\pi i}{16}
\end{aligned}$$