PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

25. november 2011

1. Vzemimo krivuljo
$$\vec{r}(t) = (-\sin t, t, -\cos t)$$
in tisti del ploskve
$$\vec{r}(u,v) = (u\sin v, -u-1, u\cos v),$$
kjer je $u < 0$.

   (a) Izračunajte presečišče med krivuljo $\vec{r}(t)$ in ploskvijo $\vec{r}(u,v)$.

   (b) Izračunajte kot pod katerim krivulja $\vec{r}(t)$ seka ploskev $\vec{r}(u,v)$.

   (c) Poiščite množico točk na ploskvi $\vec{r}(u,v)$ v katerih je tangentna ravnina vzporedna ravnini $x + \sqrt{2}y + z = 0$.

Rešitev.

   (a) Za presečišče dobimo sistem enačb:
$$-\sin t = u\sin v, \quad t = -u-1, \quad -\cos t = u\cos v,$$
ki ima ob dani omejitvi $u < 0$ očitno (edino) rešitev $u = -1$, $t = 0$ in zato (ker velja $v = t$) tudi $v = 0$. Tako dobimo točko $T(0,0,-1)$.

   (b) Za računanje iskanega kota si najprej poračunajmo tangetni vektor na krivuljo in normalni vektor na ploskev v omenjenem presečišču:
$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}}(t) &= (-\cos t, 1\sin t) \\
\dot{\vec{r}}(0) &= (-1,1,0) \\
\vec{r}_u(u,v) &= (\sin v, -1, \cos v) \\
\vec{r}_v(u,v) &= (u\cos v, 0, -u\sin v) \\
\vec{n}(-1,0) &= \vec{r}_u(-1,0) \times \vec{r}_v(-1,0) = (0,-1,1) \times (-1,0,0) = (0,-1,-1)
\end{aligned}$$
Kot med dobljenima vektorjema dobimo tako
$$\cos\varphi = \frac{\dot{\vec{r}}(0) \cdot \vec{n}(-1,0)}{|\dot{\vec{r}}(0)|\,|\vec{n}(-1,0)|} = -\frac{1}{2}$$
Kar ima rešitev $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ oziroma $\varphi = \frac{\pi}{3}$, če pogledamo oster kot, ki bi ga dobili ob nasprotni usmerjenosti katerega od vektorjev. Iskani kot med krivuljo in ploskvijo je tako končno enak $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

(c) Normala na ploskev se (kot v primeru (b)) glasi

$$\vec{n}(u,v) = \vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v) = (u\sin v, u, u\cos v)$$

kar pomeni, da zaradi želene vzporednosti z ravnino $x + \sqrt{2}y + z = 0$ dobimo sistem enačb

$$u\sin v = k, \quad u = k\sqrt{2}, \quad u\cos v = k$$

ki ima rešitev, da je u lahko poljuben (oziroma $u < 0$ zaradi začetne definiranosti $\vec{r}_u(u,v)$) in $\sin v = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos v$, torej v mora biti enak $\frac{\pi}{4} + 2\ell\pi, \ell \in \mathbb{Z}$. Tako dobimo, da iskane točke ležijo na krivulji

$$\vec{r}(u) = \left(\frac{\sqrt{2}\,u}{2}, -u-1, \frac{\sqrt{2}\,u}{2}\right), \quad u > 0.$$

2. Izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\log\left(a^2\cos^2 x + \sin^2 x\right)}{\cos^2 x}\,dx,$$

kjer velja $a > 0$.

Rešitev. Nalogo bomo rešili s pomočjo odvajanja integrala s parametrom.

$$F'(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{2a\cos^2 x}{\left(a^2\cos^2 x + \sin^2 x\right)\cos^2 x}\,dx = 2a\int_0^{\pi/2} \frac{1}{a^2\cos^2 x + \sin^2 x}\,dx =$$
$$= 2a\,\frac{1}{a}\,\arctan\left(\frac{1}{a}\tan x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

kjer se zadnji integral izračuna ali z uvedbo substitucije $u = \tan x$ ali še lažje s pomočjo tabele integralov. Torej $F(a) = \pi a + C$. Zaradi $F(1) = 0$ dobimo $C = -\pi$. Rešitev se tako glasi $F(a) = \pi a - \pi$.

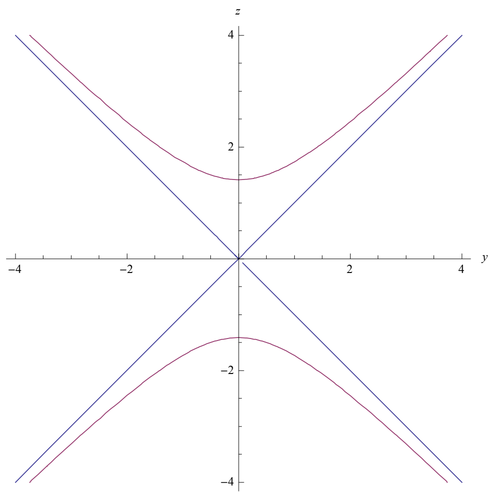
3. Izračunajte površino tistega dela ploskve

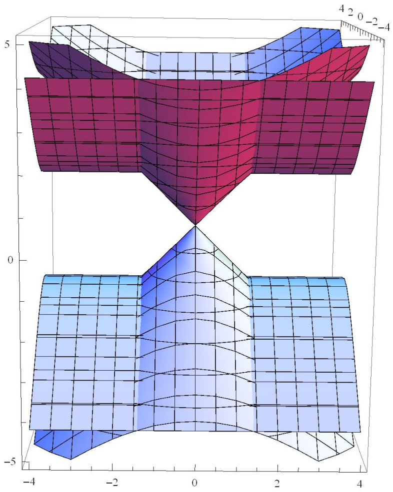
$$z^2 = x^2 + y^2,$$

ki vsebuje koordinatno izhodišče in je omejen s ploskvami

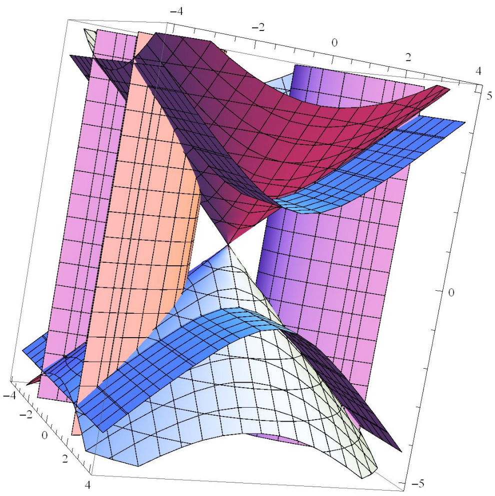
$$z^2 - y^2 = 2, \quad y = x^2 + 1, \quad y = -x^2 - 1.$$

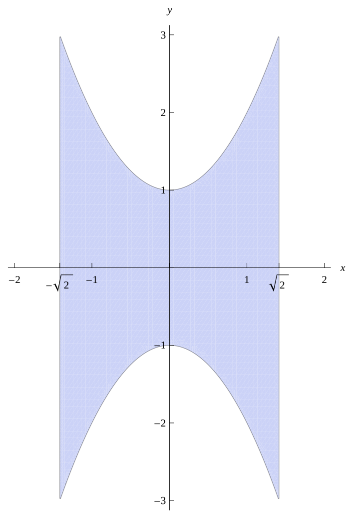
Rešitev. Projekcija presečišča med ploskvama $z^2 = x^2 + y^2$ in $z^2 - y^2 = 2$ na xy-ravnino se glasi (eliminiramo z iz teh dveh enačb): $x^2 + y^2 = y^2 + 2$ oziroma $x^2 = 2$, kar pomeni $x = \pm\sqrt{2}$. Če pogledamo najprej zgolj ploskvi $z^2 = x^2 + y^2$ in $z^2 - y^2 = 2$ prerezano pri $x = 0$ (prva slika) in iz smeri y osi (druga slika) izgledata pogleda približno takšna:





Če povrh upoštevamo še (navpični) ploskvi $y = x^2 + 1$ in $y = -x^2 - 1$, dobimo našo območje in projekcijo na xy-ravnino sledeče:





Opazimo lahko, da je ploskev $z^2 = x^2 + y^2$ simetrična glede na xy-ravnino, zato lahko poračunamo le površino za $z \geq 0$ in nato to pomnožimo z 2. Torej vzemimo le $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Tako dobimo

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}$$

Iz povedanega (in narisanega) že lahko poračunamo iskano površino

$$P = 2 \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-x^2-1}^{x^2+1} \sqrt{2}\, dy = 4\sqrt{2} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^2 + 1)\, dx =$$

$$= 4\sqrt{2} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \ldots = \frac{80}{3}$$