DRUGI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

13. januar 2012

1. Izračunajte integral
$$\int_{\mathcal{C}} (x^2 - y^2) ds,$$
kjer je $\mathcal{C}$ tisti del krivulje, definirane z
$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{in} \quad x + y + z = 1,$$
kjer velja
$$-x \leq y \leq x.$$
Rešitev. Glede na to, da krivulja leži na preseku med plaščem valja $x^2 + y^2 = 1$ in ravnine $x + y + z = 1$, jo lahko parametriziramo recimo kot
$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t - \sin t),$$
kjer nam dodaten pogoj $-x \leq y \leq x$ pove še $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$. Ker velja
$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + (\sin t - \cos t)^2}\, dt = \sqrt{2 - 2\sin t \cos t}\, dt,$$
dobimo
$$\begin{aligned} ... &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 t - \sin^2 t)\sqrt{2 - 2\sin t \cos t}\, dt = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2t)\sqrt{2 - \sin(2t)}\, dt =^* - \int_3^1 \frac{\sqrt{u}}{2}\, du = \\ &= -\frac{\sqrt{u^3}}{3}\bigg|_3^1 = \sqrt{3} - \frac{1}{3}, \end{aligned}$$
kjer smo na koraku * uvedli substitucijo $u = 2 - \sin(2t)$.

2. Na dva načina izračunajte pretok vektorskega polja
$$\vec{V} = (x, y, z^2)$$
skozi ploskev, ki je rob območja
$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 :$$

(a) z uporabo ustreznega integralskega izreka,

(b) po definiciji.

Rešitev.

(a) Uporabili bomo Gaussov izrek. Zato si poračunajmo:

$$\operatorname{div}\vec{V} = 1 + 1 + 2z = 2 + 2z.$$

Tako dobimo (kjer tekom računanja uvedemo cilindrične koordinate)

$$\begin{aligned}
... &= \iiint_V \operatorname{div}\vec{V}\,dxdydz = \iiint_V (2+2z)dxdydz = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 (2+2z)r\,dz = \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (-r^3 - 2r^2 + 3r)dr = \\
&= \frac{7}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}$$

(b) Rob območja je sestavljen iz dveh ploskev; plašča stožca in kroga pri $z = 1$:

$$\begin{aligned}
r(u,v) &= (u\cos v, u\sin v, u), \quad 0 \le v \le 2\pi, \quad 0 \le u \le 1 \\
r_u(u,v) &= (\cos v, \sin v, 1) \\
r_v(u,v) &= (-u\sin v, u\cos v, 0) \\
s(u,v) &= (u\cos v, u\sin v, 1), \quad 0 \le v \le 2\pi, \quad 0 \le u \le 1 \\
s_u(u,v) &= (\cos v, \sin v, 0) \\
s_v(u,v) &= (-u\sin v, u\cos v, 0) \\
(\vec{V}, r_v, r_u) &= \begin{vmatrix} u\cos v & u\sin v & u^2 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 1 \end{vmatrix} = ... = u^2 - u^3 \\
(\vec{V}, s_u, s_v) &= \begin{vmatrix} u\cos v & u\sin v & 1 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = ... = u
\end{aligned}$$

V mešanih produktih smo že upoštevali pravilen vrstni red, da res dobimo zunanji normali naših ploskev. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
... &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (u^2 - u^3)du + \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u\,du = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\,dv + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dv = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}$$

3. (a) Poiščite vse rešitve enačbe

$$3\tan z + 5i = 0.$$

(b) Določite parameter a tako, da bo

$$u = x^2 + ay^2 - y + (a^2 - 1)x^2y^2 + e^x \cos y$$

realni del neke analitične funkcije $f(z)$.

Za dobljeni a omenjeno analitično funkcijo $f(z)$ nato tudi poiščite.

Rešitev.

(a) Uvedimo znani enakosti $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ in $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. Tako se naša enačba prevede do

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \frac{5}{3}$$

oziroma po substituciji $u = e^{iz}$ do

$$\begin{aligned} 3u - 3u^{-1} &= 5u + 5u^{-1} \\ u^2 + 4 &= 0 \\ u &= \pm 2i \end{aligned}$$

$e^{iz} = 2i$: Torej $iz = \log 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ oziroma $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log 2$.

$e^{iz} = -2i$: Torej $iz = \log 2 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ oziroma $z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log 2$.

Obe rešitvi lahko združimo v končno rešitev: $z = \frac{\pi}{2} + k\pi - i\log 2,\ k \in \mathbb{Z}$.

(b) Dana funkcija u bo realni del neke analitične funkcije, če bo harmonična, t.j. $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Zato računajmo

$$\begin{aligned} u_x &= 2x + 2(a^2-1)xy^2 + e^x \cos y \\ u_{xx} &= 2 + 2(a^2-1)y^2 + e^x \cos y \\ u_y &= 2ay + 2(a^2-1)x^2y - 1 - e^x \sin y \\ u_{yy} &= 2a + 2(a^2-1)x^2 - e^x \cos y \\ 0 &= 2(a+1)\big(1 + (a-1)(x^2+y^2)\big). \end{aligned}$$

Tako smo dobili $a = -1$.

Za računanje imaginarnega dela bomo uporabili Cauchy-Riemannovi enačbi: $u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$. Torej dobimo

$$\begin{aligned} v &= \int u_x\,dy = \int (2x + e^x \cos y)\,dy = 2xy + e^x \sin y + C_1(x) \\ v &= -\int u_y\,dx = -\int (-2y - 1 - e^x \sin y)\,dx = 2xy + x + e^x \sin y + C_2(y) \\ v &= 2xy + x + e^x \sin y + C \\ f(z) &= u + iv = x^2 - y^2 - y + e^x \cos y + i(x + 2xy + e^x \sin y + C) \\ &= (x^2 + i2xy - y^2) + (-y + ix) + e^x(\cos y + i\sin y) + iC \\ &= (x+iy)^2 + i(x+iy) + e^{x+iy} + iC = \\ &= z^2 + iz + e^z + iC \end{aligned}$$