PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

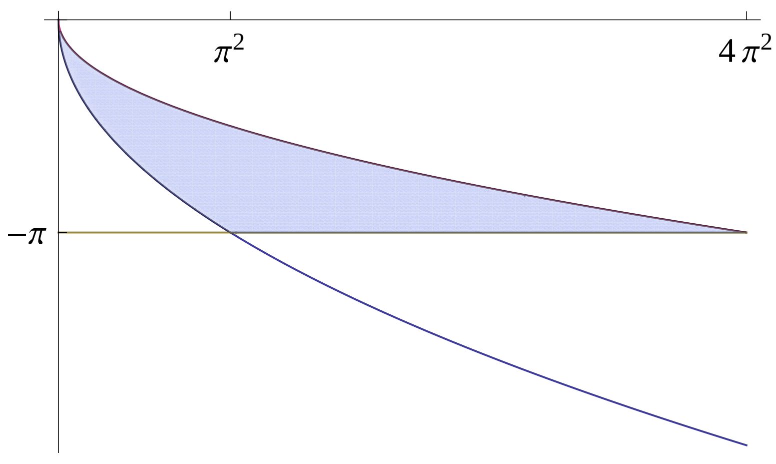
21. november 2012

1. V točki $T(1,-1,2)$ izračunajte tangentno premico na krivuljo, ki je presek ploskev
$$x^2+y^2=2 \quad \text{in} \quad x+3y+2z=2.$$

   Rešitev.
$$\vec{r}(t)=\Big(\sqrt{2}\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\varphi, \frac{2-\sqrt{2}\cos\varphi-3\sqrt{2}\sin\varphi}{2}\Big)$$
$$\dot{\vec{r}}(t)=\Big(-\sqrt{2}\sin\varphi, \sqrt{2}\cos\varphi, \frac{\sqrt{2}\sin\varphi-3\sqrt{2}\cos\varphi}{2}\Big)$$
$$\dot{\vec{r}}\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)=(1,1,-2)$$
   Tako se iskana tangentna premica glasi
$$x-1=y+1=\frac{z-2}{-2}.$$

2. Dvojni integral
$$\iint_{\mathcal{D}} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dxdy,$$
   kjer je območje $\mathcal{D}$ določeno z
$$-\sqrt{x}\le y\le -\frac{\sqrt{x}}{2} \quad \text{in} \quad y\ge -\pi,$$
   prevedite na oba možna dvakratna integrala (glede na oba možna vrstna reda integracije) in nato enega izmed njih tudi izračunajte.
   Območje $\mathcal{D}$ najprej skicirajte.

   Rešitev.



$$\iint_{\mathcal{D}} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dxdy = \int_0^{\pi^2} dx \int_{-\sqrt{x}}^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dy + \int_{\pi^2}^{4\pi^2} dx \int_{-\pi}^{-\frac{\sqrt{x}}{2}} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dy$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dxdy = \int_{-\pi}^{0} dy \int_{y^2}^{4y^2} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dx = \int_{-\pi}^{0} -y\cos\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{y^2}^{4y^2} dy$$

$$= \int_{-\pi}^{0} y\big(\cos y - \cos(4y)\big) dy = ... = 2$$

3. Izračunajte površino tistega dela ploskve

$$x^2 + y^2 + z = 1,$$

za katerega velja

$$12 - x^2 - y^2 \geq 0.$$

Rešitev.

$$P = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dxdy = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{12}} \sqrt{1+4r^2}\, r\, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{49} \sqrt{t}\, \frac{dt}{8}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{57}{2}\, d\varphi = 57\pi$$