DRUGI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

9. januar 2013

1. Imejmo krivuljo

$$\vec{r}(\varphi) = (-\cos\varphi, 2 + 3\cos\varphi, \sin\varphi),$$

ki je usmerjena v smeri naraščajočega parametra, in točke

$$T_1(1,2,-1),\ T_2(-1,5,0),\ T_3(1,-1,0).$$

Izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} 4xy\,dx - 2yz\,dy - 3z^2\,dz,$$

kjer je krivulja $\mathcal{C}$ sestavljena iz usmerjene daljice od točke T_1 do točke T_2 ter krivulje $\vec{r}(\varphi)$ od točke T_2 do točke T_3.

Rešitev. Ker je krivulja $\mathcal{C}$ sestavljena iz dveh delov, bomo tudi iskan krivuljni integral 2. vrste razdelili na dva dela. Označimo z $\mathcal{C}_1$ daljico in z $\mathcal{C}_2$ krivuljo $\vec{r}(\varphi)$. Tedaj velja

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{V}\cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{V}\cdot d\vec{r}.$$

Parametrizirajmo najprej daljico $\mathcal{C}_1$:

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \vec{r}_{T_1} + t(\vec{r}_{T_2} - \vec{r}_{T_1}), \quad 0 \le t \le 1\\
\vec{r}(t) &= (1,2,-1) + t(-2,3,1), \quad 0 \le t \le 1\\
\vec{r}(t) &= (1-2t, 2+3t, -1+t), \quad 0 \le t \le 1\\
\dot{\vec{r}}(t) &= (-2,3,1).
\end{aligned}$$

Tako se nam integral po $\mathcal{C}_1$ prevede do

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}_1} 4xy\,dx - 2yz\,dy - 3z^2\,dz\\
&\qquad = \int_0^1 \big(4(1-2t)(2+3t)(-2) - 2(2+3t)(-1+t)3 - 3(-1+t)^2\big)\,dt\\
&\qquad = \int_0^1 (27t^2 + 20t - 7)\,dt\\
&\qquad = \ldots = 12
\end{aligned}$$

Sedaj poračunajmo še integral po krivulji $\mathcal{C}_2$ (ki je pa že v parametrični obliki):

$$\vec{r}(\varphi) = (-\cos\varphi, 2 + 3\cos\varphi, \sin\varphi)$$
$$\dot{\vec{r}}(\varphi) = (\sin\varphi, -3\sin\varphi, \cos\varphi)$$

Takoj opazimo, da $\vec{r}(\varphi)$ doseže točko T_2 pri $\varphi_1 = 0$ in točko T_3 pri $\varphi = \pi$. Zato lahko iskani integral po $\mathcal{C}_2$ zapišemo kot

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{C}_2} 4xy\,dx - 2yz\,dy - 3z^2\,dz \\
&= \int_0^\pi \big(4(-\cos\varphi)(2+3\cos\varphi)\sin\varphi - 2(2+3\cos\varphi)\sin\varphi(-3\sin\varphi) - 3\sin^2\varphi\cos\varphi\big)d\varphi \\
&= \int_0^\pi \big(-8\cos\varphi\sin\varphi - 12\cos^2\varphi\sin\varphi + 12\sin^2\varphi + 15\cos\varphi\sin^2\varphi\big)d\varphi \\
&= \ldots = 6\pi - 8
\end{aligned}$$

Končen iskan rezultat je tako enak

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{V}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \vec{V}\cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \vec{V}\cdot d\vec{r} = 12 + (6\pi - 8) = 4 + 6\pi.$$

2. Z uporabo ustreznega integralskega izreka izračunajte pretok vektorskega polja

$$\vec{V} = \big(\sin(yz) + xy^2,\ 4yz^2 - e^{x-z},\ zx^2 - 2y - z^3\big)$$

skozi zunanjo stran površine telesa, ki je določeno z

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 25 \quad \text{in} \quad -x \leq y \leq x.$$

Rešitev. Ker gre za pretok vektorskega polja skozi rob nekega območja bomo uporabili Gaussov izrek:

$$\iint_S \vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{V}\,dxdydz.$$

Zato si najprej poračunajmo divergenco:

$$\operatorname{div}\vec{V} = y^2 + 4z^2 + x^2 - 3z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Tako dobimo

$$\iint_S \vec{V}\cdot d\vec{S} = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz.$$

Ker je našo območje (ustrezna) četrtina krogle v središčni legi in polmerom enakim 5, si bomo pri izračunu dobljenega trojnega integrala pomagali s sferičnimi koordinatami:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z &= r\sin\vartheta \\ J &= r^2\cos\vartheta \end{aligned}$$

Iz omejitve $-x \le y \le x$ takoj vidimo, da moramo omejiti φ in sicer $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Iz napisanega dobimo

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{V}\cdot d\vec{S} &= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^5 r^2\, r^2 \cos\vartheta\, dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 625\cos\vartheta\, d\vartheta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 1250\, d\varphi \\ &= 625\pi \end{aligned}$$

3. (a) Naj bo

$$v = \arctan\frac{y}{x} + x^2 - y^2 + xy.$$

Poiščite tak u, da bo $f = u + iv$ analitična funkcija.

(b) Poiščite vse rešitve enačbe

$$3\sin z - 2\cos z = 2.$$

Opomba: vrednosti $\arctan\frac{12}{5}$ ni potrebno izračunati.

Rešitev.

(a) Uporabili bomo Cauchy-Riemannov sistem enačb, ki mora veljati za analitično funkcijo $f = u + iv$:

$$u_x = v_y \quad \text{in} \quad u_y = -v_x.$$

Tako dobimo

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \int v_y\,dx = \int\left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{1}{x} - 2y + x\right)dx \\
&= \int\left(\frac{x}{x^2+y^2} - 2y + x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - 2xy + \frac{x^2}{2} + C_1(y) \\
u_2 &= \int -v_x\,dy = -\int\left(\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{-y}{x^2} + 2x + y\right)dy \\
&= \int\left(\frac{y}{x^2+y^2} - 2x - y\right)dy \\
&= \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - 2xy - \frac{y^2}{2} + C_2(x) \\
u &= \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - 2xy + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C
\end{aligned}
$$

(b) Uporabili bomo dejstvi

$$
\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \quad \text{in} \quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.
$$

S tem se nam naša enačba prevede v (tekom računanja bomo uvedli zamenjavo $u = e^{iz}$)

$$
\begin{aligned}
3\,\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} - 2\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} &= 2 \\
3e^{iz} - 3e^{-iz} - 2ie^{iz} - 2ie^{-iz} &= 4i \\
(3-2i)u - (3+2i)u^{-1} &= 4i \\
(3-2i)u^2 - 4iu - (3+2i) &= 0
\end{aligned}
$$

Ta enačba ima dve rešitvi:

$$
\begin{aligned}
u_{1,2} &= \frac{4i \pm \sqrt{-16+4(9+4)}}{2(3-2i)} \\
u_1 &= \frac{3+2i}{3-2i} = ... = \frac{5}{13} + i\frac{12}{13} \\
u_2 &= \frac{2i-3}{3-2i} = -1
\end{aligned}
$$

Torej

(i) $e^{iz} = u_1$:

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \frac{5}{13} + i\frac{12}{13} \\
iz &= \log\left(\frac{5}{13} + i\frac{12}{13}\right) \\
iz &= \log\left|\frac{5}{13} + i\frac{12}{13}\right| + i\left(\arctan\frac{12}{5} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z} \\
z_{1,k} &= \arctan\frac{12}{5} + 2k\pi - i\log 1 = \arctan\frac{12}{5} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(ii) $e^{iz} = u_2$:

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= -1 \\
iz &= \log(-1) = \log|-1| + i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\
z_{2,k} &= \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$