PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

22. november 2013

1. V točki $T(-1,-1,-1)$ poiščite tangentno premico na krivuljo, ki je podana s presekom
$$x^2 + y^2 = 2, \quad z = -1.$$
Nato izračunajte vse točke na ploskvi
$$x^2 + y^2 + 3z^2 = 8,$$
v katerih je tangentna ravnina pravokotna na izračunano tangetno premico.

Rešitev. Krivuljo lahko na primer parametriziramo z
$$\vec{r}(t) = \big(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t, -1\big),$$
kjer je točka T očitno doseženo pri $t = \frac{5\pi}{4}$. S tem računamo naprej
$$\dot{\vec{r}}(t) = \big(-\sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0\big)$$
$$\dot{\vec{r}}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = (1,-1,0)$$
Iskana tangentna premica se tako glasi
$$x + 1 = \frac{y+1}{-1}, \quad z = -1.$$
Normala na dano ploskev se glasi
$$\vec{n} = (F_x, F_y, F_z) = (2x, 2y, 6z) = 2(x, y, 3z).$$
Pravokotnost tangentne ravnine in tangentne premice pomeni vzporednost pripadajočega normalnega vektorja in pripadajočega smernega vektorja, torej
$$(x, y, 3z) = k(1,-1,0),$$
oziroma $x = k$, $y = -k$ in $z = 0$. Ko to vstavimo v našo ploskev, dobimo $2k^2 = 8$, oziroma $k_{1,2} = \pm 2$. Torej sta iskani točki dve in sicer
$$T_1(2,-2,0) \quad \text{in} \quad T_2(-2,2,0).$$

2. Kakšen delež površine telesa

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

izrežemo z

$$x^2 + y^2 \leq 4y?$$

Odgovor podajte z ulomkom.

Rešitev. Ploskev $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ je v resnici sfera v središčni legi s polmerom $R = 4$, zato je njena celotna površina enaka $P_1 = 4\pi R^2 = 64\pi$. Telo $x^2 + y^2 \leq 4y$ predstavlja v y smeri prestavljen valj za 2 enoti in polmerom osnovne ploskve 2. Na zgornji in spodnji polovici sfere tako dobimo dva površinsko enaka dela in zato smemo z integralom računati le zgornjo polovico. Zgornja polovica sfere se glasi $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ in zato

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{16 - x^2 - y^2}} = \frac{4}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}.$$

Za računanje uvedimo polarne koordinate, kjer iz $x^2 + y^2 \leq 4y$ sledi $r^2 \leq 4r \sin\varphi$ oziroma $r \leq 4 \sin\varphi$. Celotna izrezana površina je tako

$$\begin{aligned}
P_2 = 2 \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdydz &= 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{4\sin\varphi} \frac{4r}{\sqrt{16 - r^2}}\, dr \\
&= -4 \int_0^\pi d\varphi \int_{16}^{16\cos^2\varphi} \frac{du}{\sqrt{u}} = -8 \int_0^\pi \big(4|\cos\varphi| - 4\big) d\varphi \\
&= -32 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi - 1) d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos\varphi - 1) d\varphi \right) \\
&= \ldots = -32 \left(1 - \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{2} \right) = 32(\pi - 2).
\end{aligned}$$

Iskano razmerje je tako

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{32(\pi - 2)}{64\pi} = \frac{\pi - 2}{2\pi}.$$

3. Kolikšna je masa telesa

$$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, \quad y \geq x, \quad z \geq 0,$$

če je gostota enaka

$$\rho = \sqrt{2}(y - x).$$

Rešitev. Vemo, da velja $m = \iiint_V \rho\, dxdydz$. Glede na telo uvedimo sferične koordinate. Pogoj $z \geq 0$ nam v resnici pove $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, pogoj $y \geq x$ pove $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$ in pogoj $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$ pove $2 \leq r \leq 4$. Zato velja

$$\begin{aligned}
m &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_2^4 \Big(\sqrt{2}(r\sin\varphi\cos\vartheta - r\cos\varphi\cos\vartheta)\Big)\, r^2\cos\vartheta\, dr \\
&= \sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_2^4 (\sin\varphi - \cos\varphi)\cos^2\vartheta\, r^3\, dr \\
&= \ldots = 60\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi - \cos\varphi)\cos^2\vartheta\, d\vartheta \\
&= \ldots = 15\pi\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin\varphi - \cos\varphi)\, d\varphi \\
&= \ldots = 60\pi
\end{aligned}$$