DRUGI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE III

10. januar 2014

1. Vzemimo skalarno polje $u = 2xy - z$ in točko $T(2, 4, 16)$.

   (a) Izračunajte smerni odvod skalarnega polja u v točki T v smeri najhitrejšega spreminjanja.

   (b) Izračunajte
   $$\iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dS,$$
   kjer je S tisti del nivojske ploskve $u = 0$, za katerega velja $x^2 + y^2 \leq 1$.

   Rešitev.

   (a) Smer najhitrejšega spreminjanja je ravno smer gradienta. Zato bo iskani smerni odvod enak
   $$\operatorname{grad} u(T) \cdot \frac{\operatorname{grad} u(T)}{|\operatorname{grad} u(T)|} = |\operatorname{grad} u(T)|.$$
   Ker je $\operatorname{grad} u = (2y, 2x, -1)$, je $\operatorname{grad} u(T) = (8, 4, -1)$ oziroma $|\operatorname{grad} u(T)| = 9$.

   (b) Ploskev S, ki je enaka $2xy - z = 0$, lahko parametriziramo recimo
   $$\vec{r}(u, v) = (u, v, 2uv).$$
   Tako dobimo
   $$\begin{aligned} E &= \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_u(u, v) = (1, 0, 2v) \cdot (1, 0, 2v) = 1 + 4v^2 \\ F &= \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = (1, 0, 2v) \cdot (0, 1, 2u) = 4uv \\ G &= \vec{r}_v(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = (0, 1, 2u) \cdot (0, 1, 2u) = 1 + 4u^2 \\ \sqrt{EG - F^2} &= \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2} \end{aligned}$$
   Zaradi omejitve $u^2 + v^2 \leq 1$ vpeljimo v nadaljevanju polarne koordinate ($u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$, $J = r$):
   $$\begin{aligned} \iint_S \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dS &= \iint_D \sqrt{1 + 4u^2 + 4u^2}\, \sqrt{EG - F^2}\, dudv \\ &= \iint_D \big(1 + 4u^2 + 4v^2\big)\, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \big(1 + 4r^2\big) r\, dr \\ &= \ldots = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \ldots = 3\pi \end{aligned}$$

2. S pomočjo Greenove formule izračunajte

$$\int_{\mathcal{C}} \big(2xy + x^2y + e^x\big)dx + \big(x^2 - x^3 - 4y^2x\big)dy,$$

kjer je krivulja $\mathcal{C}$ podana z

$$\big(x^2 + y^2\big)^2 = 2(x^2 - y^2), \quad x \geq 0$$

in orientirana v smeri urinega kazalca.

Rešitev. Računajmo kot nam veleva naloga:

$$\begin{aligned} P &= 2xy + x^2y + e^x \\ Q &= x^2 - x^3 - 4y^2x \\ Q_x - P_y &= -4x^2 - 4y^2 \end{aligned}$$

Pretvorimo krivuljo $\mathcal{C}$ v polarno obliko:

$$r^4 = 2r^2\big(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\big) \quad \to \quad r = \sqrt{2\cos(2\varphi)}.$$

Da bo veljalo $\cos(2\varphi) \geq 0$ in hkrati $x \geq 0$ (tj. $\cos\varphi \geq 0$) mora veljati $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Označimo s $\mathcal{C}^+$ pozitivno orientirano (tj. v nasprotni smeri urinega kazalca) krivuljo $\mathcal{C}$. Tedaj velja

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy &= -\int_{\mathcal{C}^+} P\,dx + Q\,dy = -\iint_D (Q_x - P_y)\,dxdy \\ &= \iint_D \big(4x^2 + 4y^2\big)\,dxdy = 4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{2\cos(2\varphi)}} r^2 r\,dr \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 4\cos^2(2\varphi)\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\big(1 + \cos(4\varphi)\big)d\varphi \\ &= \ldots = \pi \end{aligned}$$

3. (a) Utemeljite, kateri sumand (en!) v

$$x^3 + 2xy + \cos x \,\mathrm{sh}\, y$$

moramo izbrisati, da bo tako dobljen izraz lahko imaginarni del neke analitične funkcije $f(z)$.
Omenjeno analitično funkcijo nato tudi poiščite.

(b) Poiščite vse rešitve enačbe

$$12\sin z + \mathrm{sh}\, z + \mathrm{ch}\, z + 13 = e^z.$$

Rešitev.

(a) Da je funkcija lahko imaginarni del neke analitične funckije, mora biti harmonična. Označimo $w = x^3 + 2xy + \cos x \operatorname{sh} y$ in računajmo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 6x - \cos x \operatorname{sh} y + \cos x \operatorname{sh} y = 6x$$

Iz napisanega vidimo, da moramo izpustiti člen x^3, torej

$$v = w - x^3 = 2xy + \cos x \operatorname{sh} y.$$

Da poiščemo pripadajoči realni del, uporabimo Cauchy-Riemannov sistem enačb ($u_x = v_y$ in $u_y = -v_x$):

$$\begin{aligned}
u &= \int v_y \, dx = \int (2x + \cos x \operatorname{ch} y) \, dx = x^2 + \sin x \operatorname{ch} y + C_1(y) \\
u &= \int -v_x \, dy = \int (-2y + \sin x \operatorname{sh} y) \, dy = -y^2 + \sin x \operatorname{ch} y + C_2(x) \\
u &= x^2 - y^2 + \sin x \operatorname{ch} y + C \\
f(z) &= u + iv = x^2 - y^2 + \sin x \operatorname{ch} y + C + i(2xy + \cos x \operatorname{sh} y) \\
&= x^2 + 2ixy - y^2 + \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y + C \\
&= (x + iy)^2 + \sin(x + iy) + C \\
&= z^2 + \sin z + C
\end{aligned}$$

(b) Računajmo (kjer bomo uvedli substitucijo $u = e^{iz}$):

$$\begin{aligned}
12 \, \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \frac{e^z - e^{-z}}{2} + \frac{e^z + e^{-z}}{2} + 13 &= e^z \\
6 \, \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i} + 13 &= 0 \\
6u - 6u^{-1} + 13i &= 0 \\
6u^2 + 13iu - 6 &= 0 \\
u_{1,2} &= \frac{-13i \pm \sqrt{-169 + 144}}{12} \\
&= \frac{-13i \pm 5i}{12}
\end{aligned}$$

1. $u_1 = -\frac{2}{3} i$:

$$\begin{aligned}
e^{iz_1} &= -\frac{2}{3} i \\
iz_{1,k} &= \log\left(-\frac{2}{3} i\right) = \log \frac{2}{3} + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\
z_{1,k} &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \log \frac{2}{3}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

2. $u_2 = -\frac{3}{2}\, i$:

$$
\begin{aligned}
e^{iz_2} &= -\frac{3}{2}\, i \\
iz_{2,k} &= \log\left(-\frac{3}{2}\, i\right) = \log\frac{3}{2} + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \\
z_{2,k} &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\log\frac{3}{2}, k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Kot vidimo, lahko rešitve celo združimo v

$$
z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i\log\frac{3}{2}, k \in \mathbb{Z}
$$