Matematika 4

6. vaja

B. Jurčič Zlobec[1]

[1]Univerza v Ljubljani,
Fakulteta za Elektrotehniko
1000 Ljubljana, Tržaška 25, Slovenija

Matematika FE, Ljubljana, Slovenija 3. junij 2013

Eulerjeva enačba

- Minimum funkcionala $A[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), y'(x))dx$.
- Eulerjeva enačba: $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0$.
- Če je $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, potem $L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} = C$.
- Minimum funkcionala pri danem pogoju:
  $A[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx$, pogoj $\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y')dx = \ell$.
  $L(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y')$.

Izračunaj vrednost funkcionala $I(f(x)) = \int_a^b L(x, f(x), f'(x))dx$

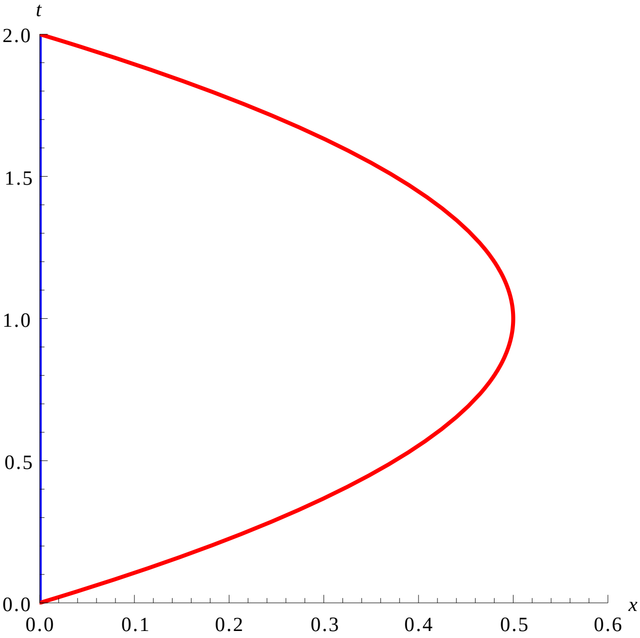
$$I(f(x)) = \int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}dx, \quad f(x) = x^2$$

- $\int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}dx = \longrightarrow$
- $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 1}x + \frac{1}{4}\log\left(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right)\Big|_0^1 = \longrightarrow$
- $\frac{1}{4}\left(2\sqrt{5} + \log\left(2 + \sqrt{5}\right)\right).$

Paradoks dvojčkov

Lastni čas sistema, ki v prostoru času opisuje pot $x(t)$, določa funkcional $\tau = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - x'(t)^2} dt$. Prostor čas ima v našem primeru eno časovno in eno prostorsko dimenzijo. Vzeli smo, da je svetlobna hitrost enaka 1. Na začetku, v času nič, se dvojčka nahajata v koordinatnem izhodišču. Eden ostane tam drugi pa odpotuje, njegovo pot v prostoru času opiše funkcija $x(t) = t(2 - t)/2$. V času $t = 2$ se zopet srečata v koordinatnem izhodišču. Izračunaj lastna časa mirujočega in gibajočega dvojčka. Pot mirujočega dvojčka opiše funkcija $x(t) = 0$.

1. $\tau_1 = \int_0^2 \sqrt{1} dt = 2$
2. $\tau_2 = \int_0^2 \sqrt{1 - (1 - t)^2} dt = \pi/2$.
   Polovica ploščine kroga s polmerom 1.
3. $\tau_1 > \tau_2$.



t
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
x

Poišči najkrajšo pot med dvema točkama v ravnini

$T_0(x_0, y_0), \quad T_1(x_1, y_1)$

- Iščemo funkcijo $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$ in $y_1 = f(x_1)$, za katero funkcional $A(f(x)) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ doseže minimum.
- $L = \sqrt{1 + y'^2} \rightarrow$, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \rightarrow$, $L - y' \dfrac{\partial L}{\partial y'} = C \rightarrow$,
- $\sqrt{1 + y'^2} - y' \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \rightarrow$, $\dfrac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \rightarrow$,
- $y' = k \rightarrow y = kx + m$.
- Funkcija je $f(x) = kx + m$, iz pogojev $y_i = kx_i + m$, $i = 0, 1$, določimo koeficienta k in m.
- Najkrajša pot je ravna črta.

Poišči optimalno pot med dvema dogodkoma v prostoru času (svetlobna hitrost je enaka 1).

$T_0(x_0, t_0), \quad T_1(x_1, t_1)$

- Iščemo funkcijo $x = x(t)$, $x_0 = x(t_0)$ in $x_1 = x(t_1)$, za katero funkcional (lastni čas) $A(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - x'(t)^2} dt$ doseže optimum, (lasni čas je najdaljši).
- $L = \sqrt{1 - x'^2} \rightarrow$, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow$, $L - x' \dfrac{\partial L}{\partial x'} = C \rightarrow$,
- $\sqrt{1 - x'^2} + x' \dfrac{x'}{\sqrt{1 - x'^2}} = C \rightarrow$, $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x'^2}} = C \rightarrow$,
- $x' = k \rightarrow x = k\, t + m$.
- Funkcija je $x(t) = k\, t + m$, iz pogojev $x_i = k\, t_i + m$, $i = 0, 1$, določimo koeficienta k in m.

Rotacijska ploskev z najmanjšo površino

Iščemo funkcijo $f(x)$, $f(x_0) = a$, $f(x_1) = b$,
$P = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx$ tako, da je P minimalna.

- $L = y\sqrt{1 + y'^2} \rightarrow,$
- $L - y'\dfrac{\partial L}{\partial y'} = C_1,$
- $\dfrac{y}{\sqrt{1 - y'^2}} = C_1 \rightarrow,\ y = C_1\sqrt{1 + y'^2} \rightarrow, \dfrac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C_1}\right)^2 - 1}} = dx.$
- $y = C_1 \mathrm{ch}\, \dfrac{x - C_2}{C_1}.$
- Iz pogojev določimo konstanti C_1 in C_2.

Izoperimetrični problem

Poišči funkcijo $y = f(x)$, ki maksimizira ploščino $\int_a^b f(x)dx$ pri dani ločni dolžini $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx = \ell$ in $f(a) = f(b) = 0$.

- $L = y - \lambda\sqrt{1+y'^2}$.
- Ker je $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$, velja $L - y'\frac{\partial L}{\partial y'} = y - \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}} = C_2$.
- $y' = \dfrac{\sqrt{\lambda^2 - (y-C_2)^2}}{y - C_2}$.
- Ločimo spremenljivke in dobimo $(x-C_1)^2 + (y-C_2)^2 = \lambda^2$. Določimo konstante C_1, C_2 in λ tako, da bo $y(a) = y(b) = 0$ in dolžina loka enaka ℓ.

Maksimalna entropija in normalna porazdelitev.

- Gostota porazdelitve slučajne spremenljivke $\rho(x) \geq 0$ na $\mathbb{R}$.
  1. $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\, dx = 1$,
  2. $\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho(x)\, dx$, matematično upanje,
  3. $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \rho(x)\, dx$, disperzija in
- Entropija je enaka $S[\rho] = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \log \rho(x)\, dx$.
- Poišči gostoto porazdelitve, ki ima pri dani disperziji σ^2 in matematičnem upanju μ, največjo entropijo.

- $L = \rho \log \rho + \lambda_1 \rho + \lambda_2 x \rho + \lambda_3 (x-\mu)^2 \rho,$
- $\dfrac{\partial L}{\partial \rho} = \log \rho + \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 (x-\mu)^2 = 0,$
- $\rho = e^{-\lambda_1 - \lambda_2 x - \lambda_3 (x-\mu)^2}$
- $e^{-\lambda_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \dfrac{1}{2\sigma^2}.$
- $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Maksimalna entropija in eksponentna porazdelitev

Gostota porazdelitve $\begin{cases} \rho(x) > 0, & x > 0 \\ \rho(x) = 0, & x \leq 0 \end{cases}$ z maksimalno entropijo pri danem matematičnem upanju $\mu > 0$.

- Pogoji: $\int_0^\infty \rho(x)dx = 1$, $\mu = \int_0^\infty x\rho(x)$.
- Funkcional: $S[\rho(x)] = -\int_0^\infty \rho(x)\log(\rho(x))dx$.
- Lagrange: $L = \rho\log(\rho) + \lambda_1\rho + \lambda_2 x\rho$
- Eulerjeva enačba: $\log\rho + \lambda_1 + \lambda_2 x = 0$,
- Rešitev: $\rho(x) = e^{-\lambda_1 - \lambda_2 x}$, $e^{-\lambda_1} = \frac{1}{\mu}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\mu}$.
- $\rho(x) = \dfrac{1}{\mu}e^{-\frac{1}{\mu}}$.

Poišči ekstremalo funkcionala pri danem pogoju

$$\int_0^2 x'(t)^2 dt,\ x(0) = 0,\ x(2) = 4 \text{ in } \int_0^2 \left(x(t)t^2 + x'(t)\right) dt = 8.$$

- $L(t, x(t), x'(t)) = x'(t)^2 + \lambda \left(x(t)t^2 + x'(t)\right).$
- Eulerjeva enačba $\lambda t^2 - 2x''(t) = 0,$
- $x(t) = \dfrac{1}{24}\left(48t - 8t\lambda + t^4\lambda\right).$
- Rešitev enačbe $\displaystyle\int_0^2 \left(x(t)t^2 + x'(t)\right) dt = 8,\ \lambda = 7.$
- $x(t) = \dfrac{1}{24}\left(-8t + 7t^4\right).$

Poišči ekstremalo funkcionala pri danem pogoju

$$\int_0^{\pi} x'(t)^2 dt,\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 0 \text{ in } \int_0^{\pi} x(t)^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

- $L(t, x(t), x'(t)) = x'(t)^2 + \lambda x(t)^2$.
- Eulerjeva enačba $\lambda x(t) - x''(t) = 0$.
- Upoštevajoč robne pogoje $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Rešitev Eulerjeve enačbe z upoštevanjem robnih pogojev:
- $x(t) = A \sin(nt)$,
- $A \int_0^{\pi} \sin(nt)^2 dt = \frac{\pi}{2}$,
- $x(t) = \sin(nt), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad n \neq 0.$

Princip najmanjše akcije

- Lagrangeeva funkcija $L(t, x, \dot{x}) = T - U$, razlika kinetične in potencialne energije.
- Kinetična $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ in potencialna energija $U = U(x)$.
- Rešitev je trajektorija $x = x(t)$ za katero zavzame akcija $S = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x})dt$ najmanjšo vrednost.
- Ker je $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, potem $L - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C = -E$.
- Zakon o ohranitvi energije $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$.
- Vsota kinetične in potencialne energije je konstantna.
- Newtonov zakon: $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \rightarrow$, $m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$.

Navpični met navzgor

Orientirajmo os x navpično navzgor. Kamen vržemo navpično, z začetno hitrostjo v_0, iz položaja $x_0 = 0$.

- Kinetična energija $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$, potencialna energija $U = mgx$.
- Lagrangeeva funkcija $L = T - U = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - mgx$.
- Eulerjeva enačba: $m\ddot{x} = -mg \rightarrow$, $\ddot{x} = -g \rightarrow$, $x(t) = C_2 + C_1 t - \frac{gt^2}{2}$.
- Rešitev: $x(t) = v_0 t - \dfrac{gt^2}{2}$.

Nihanje vzmetnega nihala

Os x orientirajmo vodoravno. Utež z maso m je pripeta na vzmet s konstanto vzmeti k. Ravnovesna lega je $x_0 = 0$. Na začetku nihalo miruje. Utež zmaknemo iz mirovne lege za $\Delta x = \ell$.

- Kinetična energija je $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$ medtem, ko je potencialna energija enaka $U = \frac{kx^2}{2}$.
- Lagrangeeva funkcija $L = T - U = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - \dfrac{kx^2}{2}$.
- Eulerjeva enačba: $m\ddot{x} = -kx \rightarrow$, $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \rightarrow$, rešitev $x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$.
- $x(t) = \ell\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$.

Oblika prosto viseče verige

Veriga vpeta v točkah $T_0(x_0, y_0)$ in $T_1(x_1, y_1)$, dolžine ℓ.

- Oblika verige je podana s funkcijo $y = f(x)$, kjer je $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1$ in dolžina je $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = \ell$.
- Oblika verige je taka, da je njena potencialna energija minimalna.
- $dU = yg\, dm = yg\rho\, ds = g\rho y\sqrt{1 + y'^2} dx$.
- $U = g\rho \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1 + y'^2} dx$.
- Lagrangeeva funkcija $L = y\sqrt{1 + y'^2} + \lambda\sqrt{1 + y'^2}$.
- Prvi integral Eulerjeve enačbe: $\dfrac{y + \lambda}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$.
- $y' = \sqrt{C^2(y - \lambda)^2 - 1}$, $y = f(x) = C\operatorname{ch}\frac{x + C_1}{C} - \lambda$.
- Določimo konstante C, C_1 in λ, da bo $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1$ in $\displaystyle\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = \ell$.

Sisetmi Eurejevih enačb

- $I[x, y] = \int_a^b L(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t)] dt.$
- Sistem Eulejevih enačb
  $$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$
  $$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0$$

Poševni met

- $L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy.$
- $x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \dot{x}(0) = v_{x0}, \quad \dot{y}(0) = v_{y0}.$
- Sistem Eulerjevih enačb:
  $\ddot{x}(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) = -g.$
- Rešitev sistema:
  $x(t) = x_0 + v_{x0}t, \quad y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + y_0 + v_{y0}t.$

Eulerjeva enačba za funkcije več spremenljivk

$$I[u(x,y)] = \iint_{\mathcal{D}} L\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy,$$
$$u(x,y)|_{\partial\mathcal{D}} = f(x,y)$$

- Označimo $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.
- $L = L(x, y, u, p, q)$, Eulerjeva enačba:
- $\dfrac{\partial L}{\partial u} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial L}{\partial p} - \dfrac{d}{dy}\dfrac{\partial L}{\partial q} = 0.$

Laplaceova diferencialna enačba

$$I[u] = \iint_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 \, dS, \quad u(x,y)_{\partial\mathcal{D}} = f(x,y).$$

- $L = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$.
- Eulerjeva enačba: $-\frac{d}{dx}p - \frac{d}{dy}q = 0$.
- $-\Delta u(x,y) = 0, \quad u(x,y)|_{\partial\mathcal{D}} = f(x,y)$.

Ploskev minimalne površine

$$I[u] = \iint_{\mathcal{D}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dxdy, \quad u(x,y)|_{\partial\mathcal{D}} = f(x,y).$$

- Poiskali bomo približno rešitev.
- Za mahne vrednosti odvodov (položna ploskev):
- $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$
- $L = 1 + \frac{1}{2}(p^2 + q^2).$
- Eulerjeva enačba $-\Delta u(x,y) = 0.$