IZPIT IZ MATEMATIKE IV
Predbolonjski študij

18. februar 2016

1. S pomočjo Laplaceove transformacije rešite diferencialno enačbo
$$x'' + 4x = 4\,;\quad x(0) = 2\,;\quad x'(0) = 1.$$

Rešitev.
$$\begin{aligned}
s^2X - sx(0) - x'(0) + 4X &= \frac{4}{s}\\
s^2X - 2s - 1 + 4X &= \frac{4}{s}\\
X(s^2+4) &= \frac{4}{s} + 2s + 1\\
X &= \frac{2s^2+s+4}{s(s^2+4)}\\
X &= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+4}\\
X &= \frac{1}{s} + \frac{s+1}{s^2+4} = \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}\\
x(t) &= 1 + \cos(2t) + \frac{\sin(2t)}{2}
\end{aligned}$$

2. S pomočjo potenčne vrste $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ določite rešitev diferencialne enačbe
$$y'' - x^2y'' - 4xy' - 2y = 0\,;\quad y(0) = 1\,;\quad y'(0) = 2.$$
Zapišite razvoj rešitve do potence x^5.

Rešitev.
$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - x^2\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - 4x\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0\\
\sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n} - 4\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0\\
\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)x^{n} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n} - 4\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= 0\\
2c_2 + 6c_3x - 4c_1x - 2c_0 - 2c_1x +&\\
+\sum_{n=2}^{\infty}\big(c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n n(n-1) - 4c_n n - 2c_n\big)x^n &= 0
\end{aligned}$$

Dobimo $c_2 = c_0$, $c_3 = c_1$ in za $n \geq 2$ še $c_{n+2}(n+2)(n+1) = c_n\big(n(n-1) + 4n + 2\big)$ oziroma $c_{n+2} = c_n$. Pogoj $y(0) = 1$ pomeni še $c_0 = 1$, pogoj $y'(0) = 2$ pa $c_1 = 2$. Imamo še $c_2 = c_0 = 1$, $c_3 = c_1 = 2$, $c_4 = c_2 = 1$, $c_5 = c_3 = 2$. Torej se razvoj rešitve do vključno potence x^5 glasi $\sum_{n=0}^{5} c_n x^n = 1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5$.

3. Rešite parcialno diferencialno enačbo

$$u_{xx} = u_{tt}; \quad 0 < x < \pi; \quad t > 0,$$

pri pogojih

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \;\; u(x,0) = 2\sin x, \;\; u_t(x,0) = 4\pi\sin(2x).$$

Rešitev. Ker imamo homogene robne pogoje, bomo na tretjem koraku dobili samo možnost negativne konstante!

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= F(x)G(t) \\
F''(x)G(t) &= F(x)G''(t) \\
\frac{F''(x)}{F(x)} &= \frac{G''(t)}{G(t)} = -k^2 \quad (\text{kjer } k > 0) \\
F_k(x) &= A_k\cos(kx) + B_k\sin(kx) \\
F_k(0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad A_k = 0 \\
F_k(\pi) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(k\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad k \in \mathbb{N} \\
F_k(x) &= B_k\sin(kx),\ k \in \mathbb{N} \\
G_k(t) &= C_k\cos(kt) + D_k\sin(kt) \\
u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\big(E_k\cos(kt) + H_k\sin(kt)\big) \\
u(x,0) &= 2\sin x \quad \Rightarrow \quad 2\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} E_k\sin(kx) \\
&\Rightarrow \quad E_1 = 2 \text{ in } E_k = 0 \text{ za } k \neq 1 \\
u_t(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)\big(-E_k k\sin(kt) + H_k k\cos(kt)\big) \\
u_t(x,0) &= 4\pi\sin(2x) \quad \Rightarrow \quad 4\pi\sin(2x) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k k\sin(kx) \\
&\Rightarrow \quad H_2 = 2\pi \text{ in } H_k = 0 \text{ za } k \neq 2 \\
u(x,t) &= 2\sin x\cos t + 2\pi\sin(2x)\sin(2t)
\end{aligned}$$

4. Poiščite ekstremalo funkcionala

$$F(y) = \int_{-1}^{1} \left(6y^2 + y'^2x^2\right)dx$$

pri pogojih $y(-1) = 1$ in $y(1) = 3$.

Rešitev.

$$f = 6y^2 + y'^2 x^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12y$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = \left(2x^2y'\right)' = 4xy' + 2x^2y''$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12y - 4xy' - 2x^2y'' = 0$$
$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0 \quad \text{(dobili smo Eulerjevo DE, nastavek } x^\lambda\text{)}$$
$$\lambda(\lambda-1) + 2\lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$$
$$y = Ax^{-3} + Bx^2$$
$$y(-1) = 1,\, y(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad -A + B = 1,\, A + B = 3 \quad \Rightarrow \quad A = 1,\, B = 2$$
$$y = x^{-3} + 2x^2$$

5. V posodi je 5 kroglic, ki se razlikujejo samo po barvi: 2 sta rdeči, 2 sta modri in ena je bela. Trikrat na slepo izberemo kroglico in jo vrnemo.

   Kolikšna je verjetnost dogodka $\mathcal{A}$, da je število izbranih modrih kroglic enako številu izbranih rdečih kroglic?

   Kako si s to izračunano verjetnostjo pomagamo do izračuna verjetnosti, da je število izbranih modrih kroglic večje od števila izbranih rdečih kroglic?

   Rešitev. Možni primeri, da je število izbranih modrih in rdečih kroglic enako, so
   - same bele kroglice, kar je verjetnost enaka $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$
   - ena modra, ena rdeča in ena bela kroglica, kar je verjetnost ob upoštevanju $3! = 6$ možnih vrstnih redov izbir enaka $6 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{24}{125}$
   Vejetnost dogodka $\mathcal{A}$ je torej enaka $\frac{1}{125} + \frac{24}{125} = \frac{25}{125} = \frac{1}{5}$.

   Ker je v posodi število modrih kroglic enako številu rdečih kroglic, je verjetnost dogodka, da je število izbranih modrih kroglic večje od števila izbranih rdečih kroglic enako verjetnosti dogodka, da je število izbranih modrih kroglic manjše od števila izbranih rdečih kroglic in zato je vsaka verjetnost izmed teh dogodkov enaka $\frac{1-\frac{1}{5}}{2} = \frac{2}{5}$, saj skupaj z dogodkom $\mathcal{A}$ tvorijo popoln sistem dogodkov (t. j. vedno se zgodi natanko eden izmed njih).