REŠITVE

Naloga 1 (20 točk)

Z Laplaceovo transformacijo rešite diferencialno enačbo

$$y'' + y = t$$

pri pogojih $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Z uporabo Laplaceove transformacije dobimo

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t],$$

$$s^2 Y - sy(0) - y'(0) + Y = \frac{1}{s^2},$$

kjer je $Y = \mathcal{L}[y]$. *Po upoštevanju začetnih pogojev dobimo enačbo*

$$Y(s^2+1) = \frac{1 + s^3 - 2s^2}{s^2},$$

odtod pa

$$Y = \frac{1 + s^3 - 2s^2}{s^2(s^2+1)}.$$

Ker moramo poiskati originalno funkcijo $y(t)$, *funkcijo* Y *razbijemo na delne ulomke:*

$$\frac{1 + s^3 - 2s^2}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{s-3}{s^2+1}.$$

Sedaj sledi

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} - 3\frac{1}{s^2+1}) = t + \cos t - 3\sin t.$$

Naloga 2 (20 točk)

Poiščite štiri od nič različne člene splošne diferencialne enačbe

$$y'' - xy = 0.$$

Rešitev iščemo v obliki neskončne potenčne vrste

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Določiti moramo koeficiente a_n. V diferencialno enačbo vstavimo vrsto za y in vrsto za drugi odvod y'':

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Sledi

$$(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \cdots) - (a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \cdots) = 0$$

in

$$2a_2 + (6a_3 - a_0)x + (12a_4 - a_1)x^2 + (20a_5 - a_2)x^3 + (30a_6 - a_3)x^4 + \cdots = 0.$$

Dobimo sistem linearnih enačb:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0 \\ 6a_3 - a_0 &= 0 \\ 12a_4 - a_1 &= 0 \\ 20a_5 - a_2 &= 0 \\ 30a_6 - a_3 &= 0 \\ \cdots\cdots & \quad \cdots \end{aligned}$$

Rešitev sistema so koeficienti:

$$a_2 = 0,\ a_3 = \frac{a_0}{6},\ a_4 = \frac{a_1}{12},\ a_5 = 0,\ a_6 = \frac{a_0}{180}, \cdots,$$

pri čemer sta a_0 in a_1 poljubni konstanti. Splošna rešitev diferencialne enačbe je zato

$$y(x) = a_0 + a_1x + \frac{a_0}{6}x^3 + \frac{a_1}{12}x^4 + \frac{a_0}{180}x^6 + \cdots,$$

prvi štirje od nič različni členi pa so

$$a_0 + a_1x + \frac{a_0}{6}x^3 + \frac{a_1}{12}x^4.$$

Naloga 3 (20 točk)

Poiščite rešitev naslednje enačbe polneskončne strune

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

pri pogojih $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $u(0,t) = A\sin\omega t$, rešitev naj bo omejena.

Polneskončna žica je na začetku v mirovnem položaju. Pri $t = 0$ se levi konec žice začne premikati na način, ki ga opisuje pogoj $u(0,t) = A\sin\omega t$. Diferencialna enačba, ki jo *rešujemo, je valovna enačba, ki opisuje odklon $u(x,t)$ žice v poljubni točki in ob poljubnem času. Na diferencialni enačbi naredimo Laplaceovo transformacijo glede na t in dobimo*

$$s^2\mathcal{L}[u(x,t)] - su(x,0) - u_t(x,0) = a^2\mathcal{L}[u_{xx}(x,t)] = a^2\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{L}[u(x,t)]$$

oziroma

$$s^2U(x,s) = a^2\frac{d^2}{dx^2}U(x,s),$$

kjer je $U(x,s)$ Laplaceova transformiranka funkcije $u(x,t)$ glede na t. To je navadna homogena linearna diferencialna enačba za $U(x,s)$ s konstantnimi koeficienti,

$$a^2\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) - s^2U(x,s) = 0,$$

katere splošna rešitev je

$$U(x,s) = C(s)e^{\frac{s}{a}x} + D(s)e^{-\frac{s}{a}x}.$$

Pri določanju koeficientov $C(s)$ in $D(s)$ upoštevamo, da je funkcija $u(x,t)$ omejena, ko gre $x \to \infty$. Tedaj mora biti tudi transformiranka $U(x,s)$ končna in zato $C(s) = 0$. Torej

$$U(x,s) = D(s)e^{-\frac{s}{a}x}$$

in

$$U(0,s) = D(s).$$

Iz robnega pogoja $u(0,t) = A\sin\omega t$ sledi

$$\mathcal{L}[u(0,t)] = U(0,s) = \mathcal{L}[A\sin\omega t] = A\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

torej

$$D(s) = A\frac{\omega}{s^2+\omega^2}.$$

Iskana rešitev navadne diferencialne enačbe je zato

$$U(x,s) = A\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-\frac{s}{a}x}.$$

Poiščimo še pripadajočo funkcijo $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}[U(x,s)] = \mathcal{L}^{-1}[A\frac{\omega}{s^2+\omega^2}e^{-\frac{s}{a}x}] = d(t-\frac{x}{a})u_{\frac{x}{a}}(t),$$

kjer je $d(t)$ inverzna Laplaceova transformiranka funkcije $D(s)$, torej

$$d(t) = A\sin\omega t.$$

Rešitev enačbe polneskončne strune je zato enaka

$$u(x,t) = Au_{\frac{x}{a}}(t)\sin\omega(t-\frac{x}{a}) = \begin{cases} A\sin\omega(t-\frac{x}{a}), & t > \frac{x}{a} \\ 0, & t \le \frac{x}{a} \end{cases}$$

Naloga 4 (20 točk)

Poiščite ekstremalo funkcionala

$$I[y] = \int_a^b (y^2 - y'^2 - 2y \sin x)\, dx.$$

Ekstremala $y = u(x)$ ustreza Eulerjevi diferencialni enačbi

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}(\frac{\partial f}{\partial y'}) = 0$$

oziroma

$$f_y - f_{xy'} - f_{yy'}y' - f_{y'y'}y'' = 0,$$

kjer je $f(x, y, y') = y^2 - y'^2 - 2y \sin x$. V našem primeru se Eulerjeva diferencialna enačba glasi takole

$$y'' + y = \sin x.$$

To je nehomogena linearna diferencialna enačba s konstantnimi koeficienti 2. reda, katere splošna rešitev je enaka

$$y(x) = y_h + y_p = C \sin x + D \cos x - \frac{1}{2} x \cos x.$$

Pri tem smo kot nastavek za partikularno rešitev y_p vzeli funkcijo oblike

$$y_p(x) = x(A \sin x + B \cos x).$$

Ekstremala funkcionala $I[y]$ je dvoparametrična družina

$$u(x) = C \sin x + D \cos x - \frac{1}{2} x \cos x,$$

kjer sta parametra C in D odvisna od robnih pogojev.

Naloga 5 (20 točk)

Poiščite asimetrijo slučajne spremenljivke, ki ima gostoto verjetnosti $p(x) = xe^{-x}$ pri pozitivnih x. Sicer je $p(x) = 0$.

Izračunajmo najprej začetne momente

$$z_k = \int_0^\infty x^{k+1} e^{-x}\, dx = -x^{k+1} e^{-x}\Big|_0^\infty + (k+1) \int_0^\infty x^k e^{-x}\, dx = (k+1) z_{k-1}.$$

Ker je $z_0 = 1$, dobimo

$$z_1 = 2z_0 = 2, \; z_2 = 3z_1 = 6, \; z_3 = 4z_2 = 24.$$

Iz zvez med začetnimi in centralnimi momenti sledi:

$$m_2 = \sigma^2 = z_2 - z_1^2 = 2,$$

$$m_3 = z_3 - 3z_2z_1 + 2z_1^3 = 24 - 36 + 16 = 4.$$

Asimetrija je

$$A(X) = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$