Izpit Matematika IV

27. avgust 2008

Rešitve

1. naloga

$$f(t) = (1-t)(u_0(t) - u_1(t)) = (1-t)u_0(t) + (t-1)u_1(t)$$

$$F(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right) + \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right)e^{-s} = \boxed{\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right)\left(1 - e^{-s}\right)}$$

2. naloga

$$y = C_1 x + C_3 x^3 + C_5 x^5 + \cdots$$

$$C_1 + 3C_3 x^2 + 5C_5 x^4 + \cdots = 1 + (C_1 x + C_3 x^3 + C_5 x^5 + \cdots)^2$$

$$C_1 + 3C_3 x^2 + 5C_5 x^4 + \cdots = 1 + C_1^2 x^2 + 2C_1 C_3 x^4 + \cdots$$

$C_1 = 1$
$3C_3 = C_1^2 \quad \rightarrow \quad C_3 = \frac{1}{3}$
$5C_5 = 2C_1 C_3 \quad \rightarrow \quad C_5 = \frac{2}{15}$

$$y = \boxed{x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots}$$

3. naloga

Ker v diferencialni enačbi nastopajo odvodi samo po spremenljivki x, jo lahko rešujemo z metodami za navadne diferencialne enačbe za neznanko $u(x)$ in so pridelane konstante odvisne od spremenljivke y.

$u'' - u = 0$ je linearna dif. enačba s konstantnimi koeficienti. Rešimo karakteristično enačbo in na osnovi korenov zapišemo rešitev.

$r^2 - 1 = 0 \quad , \quad r_{1,2} = \pm 1$
$u = C_1(y)\cosh x + C_2(y)\sinh x$
$x = 0 \quad \rightarrow \quad C_1(y) = f(y)$
$u_x = C_1(y)\sinh x + C_2(y)\cosh x$
$x = 0 \quad \rightarrow \quad C_2(y) = g(y)$

$$u(x,y) = \boxed{f(y)\cosh x + g(y)\sinh x}$$

4. naloga

$$24y - (x^2 2y')' = 0$$

$$24y - 2x2y' - x^2 2y'' = 0$$

$$x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0$$

To je *Eulerjeva* dif. enačba in njene rešitve iščemo v obliki potenc $y = x^r$

$$x^2 r(r-1)x^{r-2} + 2xrx^{r-1} - 12x^r = 0$$

$$[r(r-1) + 2r - 12]x^r = 0$$

$$r^2 + r - 12 = 0$$
$$(r-3)(r+4) = 0$$
$$r_1 = 3 \quad , \quad r_2 = -4$$
$$y = Ax^3 + Bx^{-4}$$

$$A + B = 1 \quad , \quad 8A + B/16 = 8$$
$$B = 0 \quad , \quad A = 1$$

$$y = \boxed{x^3}$$

5. naloga

$$P = P(ZZZ) + P(\check{C}\check{C}\check{C}) = \tfrac{4}{10} \cdot \tfrac{3}{9} \cdot \tfrac{2}{8} + \tfrac{6}{10} \cdot \tfrac{5}{9} \cdot \tfrac{4}{8} = \boxed{\tfrac{1}{5}}$$