IzpitMatematika IV

1.9.2010

Rešitve

1. naloga

Pri reševanju uporabimo pravilo za *Laplacovo* transformacijo funkcije, ki vsebuje *pomik na časovni osi.*

$r(t) = 8\sin t - u_\pi(t)\,8\sin t = 8\sin t + u_\pi(t)\,8\sin(t-\pi)$

$s^2Y - 4 + 9Y = \frac{8}{s^2+1}\left(1 + e^{-\pi s}\right)$

$(s^2+9)Y = \frac{8}{s^2+1}\left(1 + e^{-\pi s}\right) + 4$

$Y = \frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)}\left(1 + e^{-\pi s}\right) + \frac{4}{s^2+9}$

Parcialni ulomki: $\frac{8}{(s^2+1)(s^2+9)} = \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+9} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+9}$

$y(t) = \sin t - \frac{1}{3}\sin 3t + \left[\sin(t-\pi) - \frac{1}{3}\sin 3(t-\pi)\right]u_\pi(t) + \frac{4}{3}\sin 3t =$

$\boxed{\sin t + \sin 3t + \left[\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right]u_\pi(t)}$

Rezultat v drugi obliki:

$$\boxed{y(t) = \begin{cases} \sin t + \sin 3t & , t < \pi \\ \frac{4}{3}\sin 3t & , t > \pi \end{cases}}$$

2. naloga

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1}$$

$$(x+1)\sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1} - (2x+3)\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2C_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1}(n+1) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2C_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3C_n x^n = 0$$

$$(C_1 - 3C_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[C_n n + C_{n+1}(n+1) - 2C_{n-1} - 3C_n\Big] x^n = 0$$

$$C_1 = 3C_0$$
$$C_{n+1} = \tfrac{1}{n+1}\big[(3-n)C_n + 2C_{n-1}\big] \quad , \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

C_0 poljuben

$$C_1 = 3C_0$$

$$C_2 = \tfrac{1}{2}[2 \cdot 3C_0 + 2C_0] = 4C_0$$

$$C_3 = \tfrac{1}{3}[4C_0 + 6C_0] = \tfrac{10}{3}C_0$$

$$y = \boxed{C_0\big(1 + 3x + 4x^2 + \tfrac{10}{3}x^3 + \cdots\big)}$$

3. naloga

Najprej izrazimo odvode funkcije u po starih spremenljivkah x, y z odvodi po novih spremenljivkah v, z z uporabo *formule za posredni odvod* funkcij več neodvisnih spremenljivk.

$u_y = u_z x$
$u_{yy} = u_{zz} x^2$
$u_{xy} = (u_{zv} + u_{zz} y)x + u_z$

$(u_{zv} + u_{zz} y)x^2 + u_z x = x^2 u_{zz} y + u_z x$
$u_{zv} = 0$

Integriramo najprej po v in nato še po z .Konstante od nedoločenega integrala so odvisne od tiste spremenljivke, po kateri se ne integrira.
$u_z = C(z)$
$u = \int C(z)dz = D(z) + E(v)$, kjer sta $D(z)$ in $E(z)$ poljubni odvedljivi funkciji

$\boxed{u = D(xy) + E(x)}$

4. naloga

Eulerjeva diferencialna enačba za dani funkcional se da takoj enkrat integrirati, saj v funkcionalu y nikjer ne nastopa.

$$0 - \Big(\frac{2y'}{x2\sqrt{1+y'^2}}\Big)' = 0$$

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}} = C$$

Izračunamo ven y' in integriramo po x.

$$y' = \frac{\pm x}{\sqrt{\frac{1}{C^2} - x^2}} = \frac{\pm x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$y = \int \frac{\pm x}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = \pm\sqrt{R^2 - x^2} + D$$

$$\boxed{x^2 + (y-D)^2 = R^2}$$

5. naloga

$$\boxed{D = AB \cup AC \cup BC}$$