

Prvi kolokvij 10.4.1997

1. (3 točke) Dana je funkcija

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

Poišči njeno Fourierovo transformiranko $F(\omega)$, $\omega > 0$. Uporabi izrek o residuih.

2. (4 točke) Reši diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 1\end{aligned}$$

z nastavkom $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$. Rešitev izrazi z elementarnimi funkcijami.

3. (3 točke) Izrazi Besselovo funkcijo $\mathcal{J}_{-5/2}(x)$ z elementarnimi funkcijami.

Prvi kolokvij 8.4.1999

1. (4 točke) Z Laplace-ovo transformacijo reši diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}y'' - 2y' + y &= e^t \\ y(0) &= 2 \\ y'(0) &= 4\end{aligned}$$

2. (3 točke) Splošna rešitev diferencialne enačbe

$$(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

je polinom. Poišči jo z nastavkom v obliki vrste!

3. (3 točke) Izrazi integral

$$\int \mathcal{J}_3(x) dx$$

z Besselovima funkcijama $\mathcal{J}_0(x)$ in $\mathcal{J}_1(x)$!

Prvi kolokvij 11.4.2000

1. (4 točke) Z Laplace-ovo transformacijo reši sistem diferencialnih enačb

$$\begin{aligned}x' &= 2y - x + 1 \\y' &= 3y - 2x \\x(0) &= -2 \\y(0) &= -1\end{aligned}$$

2. (3 točke) Določi koeficienta a in b v polinomu

$$p(x) = 7x^3 + ax + b$$

tako, da bo polinom $p(x)$ ortogonalen na polinoma $p_1(x) = x$ in $p_2(x) = x^2$ na intervalu $(0, 1)$ z utežjo $\rho(x) = x$!

3. (3 točke) Z vpeljavo neodvisnih spremenljivk $u = x^2$, $v = xy$ reši parcialno diferencialno enačbo

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

Prvi kolokvij 10.4.2001

1. (4 točke) Z Laplace-ovo transformacijo poišči rešitev $x(t)$ Laguerre-ove diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}tx'' + (1 - t)x' + 2x &= 0 \\x(0) &= 1 \\x'(0) &= -2\end{aligned}$$

2. (3 točke) Izrazi $\mathcal{J}_1''(x)$ z Besselovima funkcijama $\mathcal{J}_0(x)$ in $\mathcal{J}_1(x)$!

3. (3 točke) Z vpeljavo neodvisnih spremenljivk

$$u = xy, \quad v = x^2 - y$$

poišči tisto rešitev $z(x, y)$ parcialne diferencialne enačbe

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + y, \quad ,$$

ki zadošča pogoju $z(x, x) = -x$!

Prvi kolokvij 4.4.2002

1. (4 točke) Z Laplace-ovo transformacijo poišči rešitev $y(t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}y'' - 3y' + 2y &= 4e^{2t} \\ y(0) &= -3 \\ y'(0) &= 5\end{aligned}$$

2. (3 točke) Z vpeljavo nove funkcije $y = x^2u$ poišči vsaj eno rešitev diferencialne enačbe

$$xy'' - 3y' + xy = 0$$

3. (3 točke) Z metodo separacije spremenljivk poišči rešitev $u(x, y)$ diferencialne enačbe

$$u_x + u_y = 2xu$$

Prvi kolokvij 10.4.2003

1. (4 točke) Z Laplace-ovo transformacijo poišči rešitev $x(t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}x'' + 2x' + 10x &= 20t + 4 \\x(0) &= 1 \\x'(0) &= -2\end{aligned}$$

2. (3 točke) Reši diferencialno enačbo

$$(1 - x^2)y'' - 4xy' - 2y = 0$$

z nastavkom $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$ in izrazi rešitev z elementarnimi funkcijami !

3. (3 točke) Z vpeljavo nove neznanne funkcije $y = u^2$ poišči vsaj eno rešitev $y(x)$ diferencialne enačbe

$$y'' + \frac{y'}{x} + 2y = \frac{y'^2}{2y}$$

Prvi kolokvij 5.4.2004

1. (4 točke) Z Laplace-ovo transformacijo poišči rešitev $x(t)$ enačbe

$$x' + 2x + \int_0^t x(u) du = t$$
$$x(0) = 1$$

2. (3 točke) Določi ν tako, da bo funkcija $y = x\mathcal{J}_\nu(x)$ rešitev diferencialne enačbe

$$xy'' - y' + xy = 0$$

kjer je $\mathcal{J}_\nu(x)$ Besselova funkcija !

3. (3 točke) Z metodo separacije spremenljivk poišči rešitev $u(x, y)$ parcialne diferencialne enačbe

$$u_{xy} = u$$

Prvi kolokvij 11.4.2005

1. (4 točke) Z Laplace-ovo transformacijo poišči rešitev $x(t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}x'' - 4x' + 4x &= \sin 2t \\x(0) &= 0 \\x'(0) &= 0\end{aligned}$$

2. (3 točke) Z vpeljavo nove neodvisne spremenljivke $x^2 = z$ poišči eno rešitev diferencialne enačbe

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(y'' - \frac{y'}{x}\right) + 4xy' - 48y = 0$$

3. (3 točke) Poišči funkcijo $u(x, y)$, ki je rešitev parcialne diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}yu_{yy} + u_y &= x \\u(x, 1) &= 2x \\u_y(x, 1) &= 2x\end{aligned}$$

Prvi kolokvij 6.4.2006

1. (3 točke) Z Laplace-ovo transformacijo poišči rešitev $x(t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}4x'' - 4x' + 37x &= 0 \\x(0) &= 3 \\x'(0) &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

2. (4 točke) Reši diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}y'' - xy' + 4y &= 0 \\y(0) &= 3 \\y'(0) &= 0\end{aligned}$$

z nastavkom $y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$!

Če je rešitev polinom, ga poišči !

3. (3 točke) Reši parcialno diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}xu_{xy} &= u_y + y \\u_y(1, y) &= y \\u(x, 1) &= x\end{aligned}$$

Drugi kolokvij 29.5.1997

1. (3 točke) Poišči rešitev $z(x, y)$ parcialne diferencialne enačbe

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

z vpeljavo neodvisnih spremenljivk $u = x, v = \frac{y}{x}$!

2. (4 točke) Štiri kroglice razporedimo v tri predale; posamezno kroglico damo z enako verjetnostjo v enega izmed treh predalov. Slučajna spremenljivka X je število kroglic v predalu, v katerem je kroglic največ. Poišči verjetnostno funkcijo in matematično upanje te slučajne spremenljivke !
3. (3 točke) Slučajna spremenljivka X je porazdeljena enakomerno na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$. Poišči gostoto verjetnosti slučajne spremenljivke $Y = \cos X$!

Drugi kolokvij 31.5.1999

1. (4 točke) S Fourierovo metodo reši parcialno diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}u_{xx} &= u_t + u \\u(0, t) &= 0 \\u(\pi, t) &= 0 \\u(x, 0) &= \sin 3x\end{aligned}$$

na območju $0 < x < \pi$, $t > 0$!

2. (2 točki) Poišči ekstremalo funkcionala

$$F(y) = \int_{-1}^1 x^2 y'^2 dx \quad , \quad y(-1) = 5 \quad , \quad y(1) = -1$$

3. (4 točke) V pravokotnem trikotniku s hipotenuzo 2 je kot ob kateti slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti

$$p(\alpha) = \begin{cases} \sin \alpha & , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \quad \text{ostali } \alpha \end{cases}$$

in slučajna spremenljivka O = obseg trikotnika.

- (a) Izračunaj $E(O)$!
(b) Koliko je $P(O > 3 + \sqrt{3})$?

Drugi kolokvij 30.5.2000

1. (4 točke) Na območju $0 < x < 2, t > 0$ reši parcialno diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}u_t &= 4u_{xx} \\u_x(0, t) &= 0 \\u_x(2, t) &= 0 \\u(x, 0) &= \cos^2 \frac{\pi x}{2}\end{aligned}$$

2. (3 točke) 5 kroglic razmečemo v 3 škatle; pri tem vržemo vsako izmed kroglic z enako verjetnostjo v eno izmed škatel. Poišči verjetnostno funkcijo slučajne spremenljivke

$$X = \text{število praznih škatel}$$

3. (3 točke) Funkcija

$$p(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

je gostota verjetnosti slučajne spremenljivke. Poišči matematično upanje in disperzijo !

Drugi kolokvij 29.5.2001

1. (4 točke) S Fourierovo metodo separacije spremenljivk poišči rešitev $u(x, t)$ parcialne diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}u_{xx} &= u_{tt} \\u_x(0, t) &= 0 \\u_x(\pi, t) &= 0 \\u(x, 0) &= \cos(4x) \\u_t(x, 0) &= 1\end{aligned}$$

2. (3 točke) Poišči ekstremalo funkcionala

$$\begin{aligned}F(y) &= \int_0^1 (4y^2 + y'^2) dx \\y(0) &= 0 \\y(1) &= 2 \operatorname{sh} 2\end{aligned}$$

3. (3 točke) Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke X je

$$p(x) = \begin{cases} xe^{-x^2/2} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

- (a) Koliko je $P(-1 < X < 1)$?
(b) Poišči porazdelitveno funkcijo $F(x)$!
(c) Izračunaj matematično upanje $E(X)$!

Drugi kolokvij 30.5.2002

1. (4 točke) Na območju $0 < x < \pi, t > 0$ reši parcialno diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} \\u_x(0, t) &= 0 \\u_x(\pi, t) &= 0 \\u(x, 0) &= \cos^2 x\end{aligned}$$

2. (2 točki) Kocko mečemo toliko časa, dokler ne pade 6. Kolikšna je verjetnost, da so za to potrebni vsaj trije meti?

3. (4 točke) Funkcija

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} & , 0 < x < 4 \\ 0 & , \text{ostali } x \end{cases}$$

je gostota verjetnosti slučajne spremenljivke X .

- (a) (2 točki) Koliko je $E(X)$?
(b) (2 točki) Koliko je $P(X > 3)$?

Drugi kolokvij 30.5.2003

1. (4 točke) Na območju $0 < x < 2\pi$, $t > 0$ reši parcialno diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}u_t + u &= u_{xx} \\u_x(0, t) &= 0 \\u_x(2\pi, t) &= 0 \\u(x, 0) &= \cos 2x\end{aligned}$$

2. (2 točki) V dva predala razmečemo štiri kroglice. Pri tem vsako izmed kroglic z verjetnostjo $\frac{1}{2}$ vržemo v enega izmed predalov. Kolikšna je verjetnost, da so v nekem predalu vsaj tri kroglice?
3. (4 točke) Cilindrična posoda brez pokrova je izdelana iz π kvadratnih decimetrov pločevine. Radij osnovnega kroga je slučajna spremenljivka porazdeljena enakomerno na intervalu $(0, 1)$ decimetrov. Kolikšna je verjetnost, da posoda zadrži vsaj $\frac{3\pi}{16}$ litrov vode? Pomoč: en koren enačbe $8x^3 - 8x + 3 = 0$ je $x = \frac{1}{2}$.

Drugi kolokvij 31.5.2004

1. (4 točke) Reši Dirichletovo nalogo v polarnih koordinatah

$$\begin{aligned}\Delta u(r, \varphi) &= 0, \quad \text{za } r < 1 \\ u(1, \varphi) &= 4 \sin^3 \varphi\end{aligned}$$

2. (3 točke) Dva igralca izmenoma mečeta kocko in število padlih pik seštevata. Zmaga tisti, ki prvi zbere vsoto 3 ali več. Kolikšna je verjetnost, da zmaga tisti, ki začne ?

3. (3 točke) Gostota verjetnosti slučajne spremenljivke X je

$$p(x) = \begin{cases} axe^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

- (a) Določi konstanto a !
- (b) Koliko je $P(X > \frac{1}{2})$?
- (c) Izračunaj $E(X)$!

Drugi kolokvij 30.5.2005

1. (4 točke) Poišči rešitev $u(x, t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} \quad , 0 < x < \pi , t > 0 \\u_x(0, t) &= 0 \\u_x(\pi, t) &= 0 \\u(x, 0) &= \cos 4x\end{aligned}$$

2. (3 točke) Kovanec mečemo toliko časa, dokler ne padeta dva grba zapored. Slučajna spremenljivka X je število metov in naj bo $p_n = P(X = n)$.

- (a) (1 točka) Izračunaj p_2 in p_3 !
- (b) (1 točka) Izračunaj p_4 in p_5 !
- (c) (1 točka) Izračunaj p_7 in p_n !

3. (3 točke) Skozi točko $(0, 1)$ ravnine (x, y) potegnemo premico; vsi naklonski koti so enako verjetni. Slučajna spremenljivka X je ničla premice.

- (a) (2 točki) Izračunaj $P(X < 1)$!
- (b) (1 točka) Poišči porazdelitveno funkcijo $F(x)$!

Drugi kolokvij 1.6.2006

1. (4 točke) Poišči rešitev $u(x, t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned}u_{xx} &= u_t & 0 < x < \pi, \quad 0 < t \\u(0, t) &= 0 \\u(\pi, t) &= 0 \\u(x, 0) &= x\end{aligned}$$

2. (3 točke) Štirje igralci igrajo tarok. Kart je 54, tri med njimi so posebne: *škis*, *mond* in *pagat* in skupaj sestavljajo *trulo*. Vsak dobi 12 kart, 6 jih ostane v talonu.

- (a) Kolikšna je verjetnost, da je v talonu *škis* ?
- (b) Kolikšna je verjetnost, da je v talonu vsaj ena karta od *trule* ?
- (c) En igralec ob pogledu na svoje karte vidi, da nima *škisa*. Kolikšna je verjetnost, da je *škis* v talonu ?

3. (3 točke) Krogla z radijem 1 dm je iz lahke kovine z gostoto $\frac{27}{19} \text{ kg/dm}^3$ in je na sredi votla. Radij okrogle votline, merjen v dm , je slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti

$$p(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad \text{za ostale } x \end{cases}$$

- (a) Doliči konstanto k !
- (b) Kroglo vržemo v vodo. Kolikšna je verjetnost, da potone ?
Iz fizike: vzgon je enak teži izpodrinjene tekočine.

Rešitve

10.4.1997

1. $\pi e^{-\omega}$
2. $y = \frac{1}{1-x}$
3. $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \cos x + \frac{3}{x} \sin x \right)$

8.4.1999

1. $y = \left(\frac{1}{2}t^2 + 2t + 2 \right) e^t$
2. $y = C_0 + C_1x + C_0x^2$
3. $\mathcal{J}_0(x) - \frac{4}{x} \mathcal{J}_1(x) + C$

11.4.2000

1. $x = e^t - 3$
 $y = e^t - 2$
2. $a = -10$
 $b = 4$
3. $z = x^2 f(xy)$

10.4.2001

1. $x = 1 - 2t + \frac{1}{2}t^2$
2. $\left(\frac{2}{x^2} - 1 \right) \mathcal{J}_1(x) - \frac{1}{x} \mathcal{J}_0(x)$
3. $z = x^2 - xy - y$

29.5.1997

1. $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$
2. $X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{18}{27} & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$
 $E(X) = \frac{64}{27}$
3. $p(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1 < y < 1 \\ 0, & \text{za ostale } y \end{cases}$

31.5.1999

1. $u(x, t) = e^{-10t} \sin 3x$
2. $y = 2 - \frac{3}{x}$
3. a) $3 + \frac{\pi}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

30.5.2000

1. $u(x, t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-4\pi^2 t} \cos \pi x)$
2. $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{50}{81} & \frac{30}{81} & \frac{1}{81} \end{pmatrix}$
3. $E(X) = 0$
 $D(X) = 1$

29.5.2001

1. $u(x, t) = t + \cos 4x \cos 4t$
2. $y = 2 \operatorname{sh} 2x$
3. a) $1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$
b) $F(x) = 1 - e^{-x^2/2}$
c) $E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

4.4.2002

1. $y = (4t + 4)e^{2t} - 7e^t$
2. $y = x^2 \mathcal{J}_2(x)$
3. $u = Ce^{\lambda(x-y)+x^2}$

10.4.2003

1. $x = 2t + e^{-t}(\cos 3t - \sin 3t)$
2. $C_{n+2} = C_n$
 $y = \frac{C_0 + C_1 x}{1 - x^2}$
3. $y = \mathcal{J}_0^2(x)$

5.4.2004

1. $x = 1 - 2te^{-t}$
2. $\nu = \pm 1$
3. $u = Ce^{kx+y/k}$

11.4.2005

1. $x = \frac{1}{8}[(2t - 1)e^{2t} + \cos 2t]$
2. $y = P_3(x^2)$
3. $u = xy + x \ln y + x$

6.4.2006

1. $x = 3e^{\frac{t}{2}} \cos 3t$
2. $y = 3 - 6x^2 + x^4$
3. $u = xy^2 + \frac{1}{2}(1 - y^2)$

30.5.2002

1. $u(x, t) = \frac{1}{2}(1 + e^{-4t} \cos 2x)$
2. $\frac{25}{36}$
3. a) $E(X) = 2$
b) $P(X > 3) = \frac{1}{3}$

30.5.2003

1. $u(x, t) = e^{-5t} \cos 2x$
2. $\frac{5}{8}$
3. $\frac{\sqrt{13}-3}{4}$

31.5.2004

1. $u = 3r \sin \varphi - r^3 \sin(3\varphi)$
2. $\frac{997}{1296}$
3. a) $a = 4$
b) $P(X > \frac{1}{2}) = \frac{2}{e}$
c) $E(X) = 1$

30.5.2005

1. $u = e^{-16t} \cos 4x$
2. a) $p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{8}$
b) $p_4 = \frac{1}{8}, p_5 = \frac{3}{32}$
c) $p_7 = \frac{1}{16}, p_n = \frac{1}{8}(1 - p_2 - p_3 - \dots - p_{n-3})$
3. a) $P(X < 1) = \frac{3}{4}$
b) $F(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arcctg}(-x)$

1.6.2006

1. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} e^{-n^2 t} \sin(nx)$
2. a) $\frac{1}{9}$
b) 0.3027
c) $\frac{1}{7}$
3. a) $k = 2$
b) $\frac{4}{9}$