

2. KOLOKVIJ iz MATEMATIKE IV

29.5.2008

1. (4 točke) Z metodo separacije spremenljivk rešite parcialno diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}\pi^2 u_t &= u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 3 \quad , \quad 0 < t \\ u(0, t) &= 0 \\ u(3, t) &= 0 \\ u(x, 0) &= \sin(2\pi x)\end{aligned}$$

2. (3 točke) Za deževne dneve velja: če nek dan dežuje, potem bo z verjetnostjo $\frac{1}{2}$ deževalo tudi naslednji dan. Če pa nek dan ne dežuje, bo naslednji dan deževalo z verjetnostjo $\frac{1}{4}$. Danes ne dežuje!

- (a) (1 točka) Kolikšna je verjetnost, da bo deževalo pojutrišnjem ?
(b) (2 točki) Kolikšna je verjetnost, da bo deževalo čez tri dni ?

3. (3 točke) Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X je

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ kx^2 & , \quad 0 < x < 2 \\ 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

- (a) Določite konstanto k !
(b) Koliko je $P(X > 1)$?
(c) Izračunajte $E(X)$!

Rešitve

1. naloga

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

$$\pi^2 F(x)G'(t) = F''(x)G(t)$$

$$\pi^2 \frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda^2$$

$$F''(x) + \lambda^2 F(x) = 0$$

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm \lambda i$$

$$F(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

$$x = 0 \implies F(0) = 0 \implies A = 0$$

$$x = \pi \implies F(3) = 0 \implies \lambda = \frac{n\pi}{3}$$

$$F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

$$\pi^2 \frac{G'(t)}{G(t)} = -\left(\frac{n\pi}{3}\right)^2$$

$$G_n(t) = e^{-n^2 t/9}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t/9} \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right)$$

$$t = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = \sin(2\pi x) \implies B_6 = 1, \text{ ostali } B_n = 0$$

$$u(x, t) = e^{-4t} \sin(2\pi x)$$

2. naloga

$D_n =$ (čez n dni dežuje)

$$P(D_{n+1}/D_n) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(D_{n+1}/\overline{D}_n) = \frac{1}{4}$$

$$P(D_1) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(\overline{D}_1) = 1 - P(D_1) = \frac{3}{4}$$

$$P(D_2) = P(D_1)P(D_2/D_1) + P(\overline{D}_1)P(D_2/\overline{D}_1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

$$P(\overline{D}_2) = 1 - P(D_2) = \frac{11}{16}$$

$$P(D_3) = P(D_2)P(D_3/D_2) + P(\overline{D}_2)P(D_3/\overline{D}_2) = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{11}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{21}{64}$$

3. naloga

(a) $F(x)$ zvezna $\implies k = \frac{1}{4}$

(b) $P(X > 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

(c) $E(X) = \int_0^2 x \frac{1}{2} x \, dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}$