

2. KOLOKVIJ iz MATEMATIKE IV

4.6.2009

1. (40%) Rešite parcialno diferencialno enačbo

$$\begin{aligned}u_{xx} &= u_t - 4u \quad , \quad 0 < x < \pi \quad , \quad 0 < t \\u_x(0, t) &= 0 \\u_x(\pi, t) &= 0 \\u(x, 0) &= \cos^2 x\end{aligned}$$

2. (40%) Štiri kroglice zmečemo v dve škatli, za vsako kroglico velja:

dogodek	verjetnost
kroglica pade v večjo škatlo	$\frac{1}{2}$
kroglica pade v manjšo škatlo	$\frac{1}{3}$
kroglica pade mimo škatel	$\frac{1}{6}$

Izračunajte verjetnosti dogodkov:

- (a) (20%) V škatlah je enako število kroglic.
(b) (20%) V večji škatli je več kroglic kot v mali škatli.
3. (20%) V brezvetrju sta hitrosti letala 60 m/s in avtomobila 30 m/s . V protivetru se hitrost letala zmanjša za hitrost vetra, hitrost avtomobila pa se zmanjša za $\frac{1}{4}$ hitrosti vetra. Hitrost protivetra je slučajna spremenljivka z gostoto verjetnosti

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{1250} & , \quad 0 < x < 50 \\ 0 & , \quad \text{ostali } x \end{cases}$$

kjer je $x =$ hitrost vetra v m/s . Kolikšna je verjetnost, da je avtomobil hitrejši od letala ?

REŠITVE

1. naloga

$$u(x, t) = F(x)G(t)$$

$$F''(x)G(t) = F(x)G'(t) - 4F(x)G(t)$$

$$\frac{F''}{F} = \frac{G'}{G} - 4 = -\lambda^2$$

$$F'' + \lambda^2 F = 0$$

$$r^2 + \lambda^2 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm \lambda i$$

$$F(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

$$F'(x) = -A\lambda \sin(\lambda x) + B\lambda \cos(\lambda x)$$

$$x = 0 \implies B = 0$$

$$x = \pi \implies \lambda = n$$

$$F_n(x) = A_n \cos(nx)$$

$$\frac{G'(t)}{G(t)} = 4 - n^2$$

$$G_n(t) = e^{(4-n^2)t}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{(4-n^2)t} \cos(nx)$$

$$t = 0 \implies \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(nx) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x)$$

$$A_0 = \frac{1}{2}, A_2 = \frac{1}{2}, \text{ ostali } A_n = 0$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(e^{4t} + \cos(2x) \right)$$

2. naloga

dogodek	načini			verjetnost
	večja	mala	-	
enako kroglic	2	2	0	$6 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2}$
	1	1	2	$6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6^2}$
	0	0	4	$\frac{1}{6^4}$
v večji več kroglic	4	0	0	$\frac{1}{2^4}$
	3	1	0	$4 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3}$
	3	0	1	$4 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{6}$
	2	1	1	$6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$
	2	0	2	$6 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{6^2}$
	1	0	3	$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6^3}$

3. naloga

Najprej izračunamo hitrost protivetra, pri kateri sta letalo in avtomobil enako hitra. Avtomobil bo hitrejši od letala, če bo protiveter močnejši od te hitrosti.

$$60 - v = 30 - \frac{1}{4}v$$

$$30 = \frac{3}{4}v$$

$$v = 40$$

$$P = \int_{40}^{50} \frac{x}{1250} dx = \frac{1}{1250} \frac{x^2}{2} \Big|_{40}^{50} = \frac{1}{2500} (2500 - 1600) = \frac{9}{25}$$