2. KOLOKVIJ MATEMATIKA IV

4.6.2010

1. (40%) Reši *Dirichletovo* nalogo za notranjost kroga $r < 2$:

$$\begin{aligned} \triangle u(r,\varphi) &= 0 \quad , \quad r < 2 \\ u(2,\varphi) &= \sin 2\varphi \end{aligned}$$

2. (30%) Poišči ekstremalo funkcionala

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y^2 - y'^2 - 2xy)dx$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 2 \\ y(\tfrac{\pi}{2}) &= \tfrac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3. (30%) Spopad dveh vojnih ladij poteka v naslednjih okoliščinah:

   - Ladji streljata druga proti drugi istočasno v časovnih presledkih, ki je daljši od preleta izstrelka.
   - Ko je ladja zadeta, ne more več streljati.
   - Dvakrat zadeta ladja se potopi.
   - $p = \frac{2}{3}$ je verjetnost, da prva ladja zadane v posameznem strelu. $q = \frac{1}{2}$ je verjetnost zadetka za drugo ladjo.

   (a) (20%) Kolikšna je verjetnost, da prva ladja potopi drugo z največ tremi streli ?

   (b) (10%) Naj imata ladji na voljo neskončno izstrelkov. Kolikšna je verjetnost, da bosta ostali obe nepotopljeni ?

Rešitve

1. naloga

$$u = F(r)G(\varphi)$$
$$F''G + \frac{1}{r}F'G + \frac{1}{r^2}FG'' = 0$$
$$r^2\frac{F''}{F} + r\frac{F'}{F} = -\frac{G''}{G} = +\lambda^2$$

$$G'' + \lambda^2 G = 0$$
$$k^2 + \lambda^2 = 0$$
$$k_{1,2} = \pm\lambda i$$
$$G = A\cos\lambda\varphi + B\sin\lambda\varphi$$
$$\text{perioda} = 2\pi \quad \to \quad \lambda = n$$
$$G_n(\varphi) = A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)$$

$$r^2\frac{F''}{F} + r\frac{F'}{F} = n^2$$
$$r^2F'' + rF' - n^2F = 0$$

Eulerjevo dif.enačbo rešimo z nastavkom $F = r^k$

$$r^2k(k-1)r^{k-2} + rkr^{k-1} - n^2r^k = 0$$
$$\left(k^2 - k + k - n^2\right)r^k = 0$$
$$k_{1,2} = \pm n$$
$$F_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-n}$$

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)\right]\left[C_nr^n + D_nr^{-n}\right]$$

$u(0,\varphi)$ definirana funkcija $\quad \to \quad D_n = 0$

$$u(2,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)\right]C_n2^n$$

$u(2,\varphi) = \sin 2\varphi \quad \to \quad A_n = B_n = 0$ razen za indeks $n = 2$:

$$B_2C_24 = 1 \quad \to \quad B_2C_2 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{u(r,\varphi) = \frac{r^2}{4}\sin 2\varphi}$$

2. naloga

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)' = 0$$

$$2y - 2x - (-2y')' = 0$$

linearna dif.enačba s konst. koeficienti : $y'' + y = x$

karakteristična enačba : $k^2 + 1 = 0$

rešitev homogene enačbe : $y = A\cos x + B\sin x$

nastavek za partikularno $y = Cx + D \quad \rightarrow \quad C = 1\ ,\ D = 0$

$$y = A\cos x + B\sin x + x$$

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad 2 = A$$

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{2} = B + \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad B = 0$$

$$\boxed{y = 2\cos x + x}$$

3. naloga

V naslednjih tabelah pomeni Z=zadane N=Ne, indeks je ladja.

a)

Prva ladja lahko potopi drugo na tri načine:

$1.strel$	$2.strel$	$3.strel$	$verjetnost$
Z_1N_2	Z_1		$\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{9}$
Z_1N_2	N_1	Z_1	$\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{2}{3} = \frac{2}{27}$
N_1N_2	Z_1N_2	Z_1	$\frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{27}$

Verjetnost dogodka je $P = \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{1}{27} = \boxed{\frac{1}{3}}$

b)

Obe ladji bosta ostali nepotopljeni, če se nekajkrat obstreljujeta brez zadetkov, potem pa v istočasnem strelu zadaneta druga drugo:

$1.strel$	$2.strel$	$3.strel$	$\cdots$	$verjetnost$
Z_1Z_2				$\frac{2}{3}\frac{1}{2}$
N_1N_2	Z_1Z_2			$\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}\frac{1}{2}$
N_1N_2	N_1N_2	Z_1Z_2		$\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\right)^2\frac{2}{3}\frac{1}{2}$
N_1N_2	N_1N_2	N_1N_2	Z_1Z_2	$\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\right)^3\frac{2}{3}\frac{1}{2}$
$\cdots$				

Verjetnost dogodka je vsota geometrijske vrste:

$$P = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 + \cdots = \boxed{\frac{2}{5}}$$