1. Kolokvij MATEMATIKA IV

11.4.2014

1. (40%) Z *Laplacovo* transformacijo poiščite rešitev $y(t)$ diferencialne enačbe

$$\begin{aligned} 4y'' - 12y' + 9y &= 3 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

2. (20%) Vrednost integrala

$$\int_0^1 2016\, t^3 (1-t)^5\, dt$$

je enaka celemu številu. Z uporabo funkcij *Beta* in *Gama* integral izračunajte.

3. (40%) Z vpeljavo funkcije $u = x^2 y$ in neodvisne spremenljivke $t = x^2$ poiščite vsaj eno rešitev diferencialne enačbe

$$xy'' + 5y' + 4x^3 y = 0 \quad .$$

Rešitve

1. naloga

$$4(s^2Y - s) - 12(sY - 1) + 9Y = \frac{3}{s}$$

$$(4s^2 - 12s + 9)Y = \frac{3}{s} + 4s - 12$$

$$Y = \frac{3 + 4s^2 - 12s}{s(2s-3)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{2s-3} + \frac{C}{(2s-3)^2}$$

$$3 + 4s^2 - 12s = A(2s-3)^2 + Bs(2s-3) + Cs$$

$$3 + 4s^2 - 12s = (4A + 2B)s^2 + (-12A - 3B + C)s + 9A$$

$$\begin{array}{lcl} 3 = 9A & \rightarrow & A = \frac{1}{3} \\ 4 \cdot \frac{1}{3} + 2B = 4 & \rightarrow & B = \frac{4}{3} \\ -12 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{4}{3} + C = -12 & \rightarrow & C = -4 \end{array}$$

$$Y = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s - 3/2} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(s-3/2)^2}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{3t/2} - te^{3t/2}}$$

2. naloga

$$\int_0^1 2016\, t^3(1-t)^5 dt \ = 2016\,\mathcal{B}(4,6) = 2016\,\frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)} = 2016\,\frac{2\cdot 3}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} =$$

$$\boxed{4}$$

3. naloga

Pri izpeljavi uporabimo pravilo za posredni odvod funkcije:

$$\frac{d..}{dx} = \frac{d..}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = (..)'2x$$

Za .. vstavimo najprej funkcijo u, drugič pa u'.

$$y = \frac{u}{x^2} \qquad / \quad \frac{d}{dx}$$

$$y' = \frac{(u'2x)x^2 - u2x}{x^4} = \frac{2x^2u' - 2u}{x^3} \qquad / \quad \frac{d}{dx}$$

$$y'' = \frac{(4xu' + 2x^2(u''2x) - 2u'2x)x^3 - (2x^2u' - 2u)3x^2}{x^6} =$$

$$\frac{4x^6u'' - 6x^4u' + 6x^2u}{x^6}$$

$$\frac{4x^4u'' - 6x^2u' + 6u}{x^3} + \frac{10x^2u' - 10u}{x^3} + 4xu = 0$$

$$4x^4u'' + 4x^2u' + (4x^4 - 4)u = 0$$

$$t^2u'' + tu' + (t^2 - 1)u = 0$$

$$u = \mathcal{J}_1(t)$$

$$\boxed{y = \frac{\mathcal{J}_1(x^2)}{x^2}}$$