PRVI KOLOKVIJ IZ MATEMATIKE IV

7.4.1998

1. Funkcija g je definirana s predpisom
$$g(t) = \begin{cases} \sin t & ; \quad 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases} .$$
Določi funkcijo f, če je
$$\int_0^t e^{u\pi} f(t-u)\, du = g(t) - \operatorname{sh}(\pi t).$$

2. Hermitejeve polinome definiramo z enakostjo
$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}.$$
Določi $H_0(x)$ in $H_1(x)$.
Pokaži, da sta $H_0(x)$ in $H_1(x)$ ortogonalna na intervalu $(-\infty, \infty)$ z utežjo $\rho(x) = e^{-x^2}$.
Izračunaj
$$\|H_0(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0^2(x)\, dx,$$
$$\|H_1(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)\, dx.$$
Izračunaj prva dva koeficienta c_0 in c_1 pri razvoju funkcije $\cos x$ po Hermitejevih polinomih:
$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x).$$

3. Reši parcialno diferencialno enačbo
$$y u_{yy} + u_y = x$$
pri pogojih $u(x, 2) = 4x(1 - \log 2)$ in $u_y(x, 2) = -x$.

REŠITVE PRVEGA KOLOKVIJA IZ MATEMATIKE IV

7.4.1998

1. Funkcija g je definirana s predpisom

$$g(t) = \begin{cases} \sin t & ; \quad 0 \le t \le \pi \\ 0 & ; \quad \text{sicer} \end{cases} .$$

Določi funkcijo f, če je

$$\int_0^t e^{u\pi} f(t-u)\, du = g(t) - \mathrm{sh}(\pi t).$$

Rešitev.
S pomočjo Laplaceove transformacije dobimo

$$\frac{1}{s-\pi} F(s) = \int_0^\pi e^{-st} \sin t\, dt - \frac{\pi}{s^2 - \pi^2} \ ,$$

tako da je

$$\begin{aligned} F(s) &= (s-\pi)\left(\left[\frac{e^{-s\pi}}{s^2+1}(-s\sin t - \cos t)\right]_0^\pi - \frac{\pi}{s^2-\pi^2}\right) \\ &= (s-\pi)\left(\frac{e^{-s\pi}}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{\pi}{s^2-\pi^2}\right) \\ &= e^{-s\pi}\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{\pi}{s^2+1}\right) + \frac{s}{s^2+1} - \frac{\pi}{s^2+1} - \frac{\pi}{s+\pi} \end{aligned}$$

in

$$f(t) = u_\pi(t)(\cos(t-\pi) - \pi\sin(t-\pi)) + \cos t - \pi \sin t - \pi e^{-\pi t}.$$

2. Hermitejeve polinome definiramo z enakostjo

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}.$$

Določi $H_0(x)$ in $H_1(x)$.
Preveri, da sta $H_0(x)$ in $H_1(x)$ ortogonala na intervalu $(-\infty, \infty)$ z utežjo $\rho(x) = e^{-x^2}$.
Izračunaj

$$\|H_0(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_0^2(x)\, dx,$$

$$\|H_1(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x)\, dx.$$

Izračunaj prva dva koeficienta c_0 in c_1 pri razvoju po Hermitejevih polinomih funkcije

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x).$$

Rešitev.
$H_0(x) = 1$ in $H_1(x) = 2x$.
Ortogonalnost:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\, dx = 0.$$

Norma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} 4x^2 e^{-x^2}\, dx = 8\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = 2\sqrt{\pi}.$$

Koeficienta razvoja:

$$c_0 = \frac{1}{\|H_0(x)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty} \cos x\ e^{-x^2}\, dx = 2\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty} \cos x\ e^{-x^2}\, dx = e^{-\frac{1}{4}},$$
$$c_1 = \frac{1}{\|H_1(x)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty} 2x\cos x\ e^{-x^2}\, dx = 0.$$

Pri računanju integralov upoštevamo sodost in lihost funkcij, ki jih integriramo.

3. Reši parcialno diferencialno enačbo

$$yu_{yy} + u_y = x$$

pri pogojih $u(x,2) = 4x(1-\log 2)$ in $u_y(x,2) = -x$.

Rešitev.
Naj bo $v = u_y$. Najprej rešimo homogeno enačbo $yv_y + v = 0$ in dobimo $v = \frac{1}{y}f_1(x)$. Rešitev nehomogene enačbe je $v = x + \frac{f_2(x)}{y}$, upoštevamo še začetni pogoj in dobimo $v = x - \frac{4x}{y}$. Zato je $u = xy - 4x\log y + f_3(x)$ in ob upoštevanju začetnega pogoja dobimo, da je

$$u(x,y) = xy - 4x\log y + 2x.$$